STJEPAN MINTAKOVIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ STEREOMETRIJE

ZAVOD ZA IZDAVANJE UDŽBENIKA • SARAJEVO •

Prof. STJEPAN MINTAKOVIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ STEREOMETRIJE

SA UPUTAMA I REZULTATIMA

(Prema programu škola drugog stepena)

ZAVOD ZA IZDAVANJE UDŽBENIKA

SARAJEVO, 1968.

Recezenti

Dr. MAHMUT BAJRAKTAREVIĆ, profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Sarajevu, i MUSTAFA DRLJEVIĆ, profesor Više pedagoške škole u Sarajevu

Urednik:

MUHAREM BORIĆ

PREDGOVOR

Na početku svakog paragrafa u knjizi su date definicije i teoreme koje su učenici već učili. Stoga se preporučuje učenicima da ponove i nauče taj materijal da bi mogli bez poteškoća rješavati zadatke.

U drugom dijelu knjige nalaze se rezultati svih zadataka kao i uputstva za rješavanje onih zadataka za koje smo pretpostavljali da bi uputstva mogla biti potrebna. Učenicima se preporučuje da dobivene rezultate u svakom slučaju upoređuju s rezultatima u knjizi i da se pri rješavanju zadataka što manje koriste uputstvima, jer treba razvijati što više samostalnost.

U Zbirci je dat veliki broj slika koje će olakšati, a u nekim slučajevima i omogućiti uspješno shvaćanje i rješavanje zadataka. Iz tehničkih razloga nije bilo moguće dati slike za sve zadatke. Učenicima se preporučuje da u takvim slučajevima sami nacrtaju slike.

Dužnost mi je da se na ovom mjestu zahvalim drugovima recenzentima dr Mahmutu Bajraktareviću, profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, i Mustafi Drljeviću, profesoru Više pedagoške škole u Sarajevu. Oni su vrlo savjesno pregledali čitavu Zbirku i riješili, odnosno prokontrolisali sve zadatke. Svojim primjedbama, savjetima i prijedlozima oni su mi pomogli u nastojanju da stručni i metodski nivo Zbirke bude na potrebnoj visini. Ovom prilikom im iskreno zahvaljujem.

Autor

ZADACI

1. Tačka, prava i ravan (pravac i ravnina)

Prava (pravac), koja ima sa ravni (ravninom) dvije zajedničke tačke, ima s njom i sve tačke zajedničke. Za takvu pravu kažemo da leži u toj ravni.

Prava, koja leži u ravni, dijeli ravan u dvije poluravni (poluravnine).

Ravan (ravnina) je određena: 1) pravom i tačkom van te prave, 2) dvjema pravama koje se sijeku i 3) dvjema paralelnim pravama.

Između tačke i ravni mogu postojati ovi uzajamni položaji: 1) tačka je u ravni i 2) tačka je van ravni.

Prava leži u ravni ako ima s njom dvije zajedničke tačke. Prava može imati prema ravni još dva položaja: one nemaju zajedničkih tačaka; tada kažemo da su međusobno paralelne. Prava ima sa ravni samo jednu zajedničku tačku; tada kažemo da prava prodire kroz ravan (probada ravninu) ili da ravan siječe pravu.

Dvije ravni se poklapaju ako imaju tri zajedničke nekolinearne tačke (tačke koje ne leže na jednoj istoj pravoj). Dvije ravni mogu imati jednu zajedničku pravu. Tada kažemo da se ravni sijeku, a zajednička prava je linija presjeka (presječnica). Dvije ravni se mogu naći i u trećem uzajamnom položaju: kada nemaju nijedne zajedničke tačke. Kažemo da su ravni paralelne.

Dvije prave u prostoru mogu da se nađu u jednom od ova četiri uzajamna položaja: 1) imaju dvije zajedničke tačke; u tom slučaju imaju sve zajedničke tačke; kažemo da se prave poklapaju; 2) dvije prave imaju samo jednu zajedničku tačku; kažemo da se sijeku; 3) dvije prave nemaju nijednu zajedničku tačku ali leže u istoj ravni (ravnini); kažemo da su paralelne i 4) dvije prave nemaju zajedničku tačku i ne leže u istoj ravni; kažemo da su prave mimoilazne (mimosmjerne).

Tačka u kojoj ma koja prava prodire kroz ravan zove se njezin prodor (probodište). Prava je normalna na ravan kad je normalna na svakoj pravoj te ravni koja prolazi kroz njen prodor. Prava koja prodire kroz ravan, a nije na nju normalna, zove se kosa prava. Tačka u kojoj normala prodire kroz ravan zove se podnožje (nožište) normale.

Dužina normale, povučene iz neke tačke u prostoru do ravni (ravnine), zove se udaljenost (odstojanje) te tačke od ravni.

Ako je prava paralelna s ravni, onda se pod udaljenošću prave od ravni smatra udaljenost bilo koje tačke te prave od ravni. Pod udaljenošću dviju paralelnih ravni smatra se udaljenost (rastojanje) bilo koje tačke jedne ravni od druge ravni.

Ugao (kut) između dvije poluprave (polupravca), koje imaju proizvoljan položaj u prostoru, zovemo onaj ugao koji međusobno zatvaraju poluprave koje su povučene iz ma koje tačke prostora paralelno i u istom smjeru sa zadanim polupravama.

Podnožje (nožište) normale, spuštene iz tačke na ravan, zove se ortogonalna (normalna) projekcija ili, kraće, projekcija te tačke na tu ravan. Projekcija neke geometrijske figure na ravan je geometrijsko mjesto projekcija svih tačaka te figure na tu ravan.

Ugao (kut) između prave (pravca) i ravni (ravnine) je oštri ugao (šiljasti kut) (ako je prava kosa prema ravni), koji zatvara prava sa svojom projekcijom na tu ravan. Ako je prava normalna na ravan, kažemo da je taj ugao prav.

Diedar (prostorni kut) je geometrijska figura koju određuju dvije poluravni ograničene zajedničkom pravom (pravcem). Zajednička prava je ivica (brid) diedra, a poluravni su njegove strane.

Ako na ivici diedra odaberemo proizvoljnu tačku i iz nje povučemo na svakoj strani diedra normalu na ivicu, nastali ugao (kut) između tih normala zovemo nagibni ugao (prikloni kut) diedra.

Dva diedra se smatraju jednakim ako se mogu dovesti do poklapanja. Od dva nejednaka diedra je manji onaj koji predstavlja dio drugog.

Dva jednaka diedra imaju jednake nagibne uglove. Većem diedru odgovara veći nagibni ugao. Vrijedi i obrnuta teorema: dva su diedra jednaka kad su im jednaki nagibni uglovi. Veći je onaj diedar koji ima veći nagibni ugao.

Unakrsni diedri su jednaki. Diedri sa stranama, paralelnim u istom ili u suprotnom smislu, su jednaki.

Za dvije ravni (ravnine) se kaže da su uzajamno normalne ako obrazuju prav diedar.

Uzajamni položaj tačaka, pravih i ravni (pravaca i ravnina) u prostoru

1. a) Koliko je ravni (ravnina) određeno sa četiri tačke koje ne leže u jednoj istoj ravni (nisu komplanarne)?

b) Koliko je ravni određeno sa pet tačaka od kojih ni koje četiri nisu komplanarne?

2. Koliko ravni (ravnina) je određeno sa:

a) tri b) četiri c) pet d) n

prava (pravaca) koje prolaze kroz istu tačku ako ni koje tri od tih prava ne leže u istoj ravni (nisu komplanarne)?

3. U koliko prava (pravaca) se sijeku: a) tri b) četiri c) pet d) n ravni (ravnina) prostora koje sve prolaze kroz istu tačku tako da ni koje tri od tih ravni ne prolaze kroz istu pravu?

4. Ako se redom spoje četiri tačke A, B, C, D koje nisu komplanarne (ne leže u jednoj istoj ravni), dobiće se vitoperi četvorougao (četverokut). Spajanjem sredina stranica toga četvorougla nastaje paralelogram. — Dokažite!

5. Kroz zadanu tačku M položite pravu (pravac) koja siječe dvije zadane mimoilazne prave (mimosmjerna pravca) a i b. (Zadatak treba riješiti konstruktivno!)

6. Odredite (konstruktivno) prodor (probodište) zadane prave p i zadane ravni (ravnine) π.

7. Zadane su tri mimoilazne prave (mimosmjerna pravca). Odredite četvrtu pravu koja presijeca zadane tri prave. Koliko rješenja ima zadatak?

8. Odredite u prostoru jednakostraničan trougao (trokut) koji ima jedan vrh (tjeme) u zadanoj tački A, a jednu stranicu na zadanoj pravoj (pravcu) p.

9. Tačke A i B leže van prave p. Odredite na toj pravoj tačku C tako da $AC+BC$ bude minimalno.

Paralelne prave i ravni (pravci i ravnine)

10. Ako je neka prava (pravac) paralelna s nekom pravom te ravni (ravnine), onda je ta prava paralelna i sa samom ravni. — Dokažite!

11. Ako su dvije prave (pravca) p i q paralelne s trećom pravom r, onda su paralelne i međusobno. — Dokažite!

12. Ako su prave (pravci) p i q međusobno paralelne, a prava p je paralelna i sa ravni (ravninom) π, onda je s tom ravni paralelna i prava q. — Dokažite!

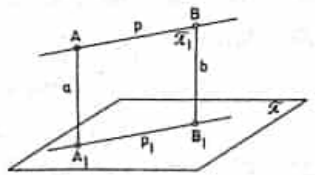
13. Dvije ravni (ravnine) koje su paralelne s trećom ravni, paralelne su i među sobom. — Dokažite!

14. Ako su ravni (ravnine) π_1 i π_2 paralelne s pravom a, te imaju jednu zajedničku tačku A, njihova je presječna linija (presječnica) $p \parallel a$. — Dokažite!

15. Kada se dvije paralelne ravni (ravnine) π_1 i π_2 presijeku trećom ravni Σ, onda su njihovi presjeci p i q paralelni. — Dokažite!

16. Tri neparalelne ravni (ravnine) π_1, π_2 i π_3, od kojih je svaka paralelna sa pravom (pravcem) p i nemaju s njom zajedničke tačke, sijeku se u tri paralelne prave. — Dokažite!

17. Izvan ravni (ravnine) π je zadana s njom paralelna prava (pravac) p (sl. 1). Kroz dvije tačke A i B prave p prolaze paralele a i b koje prodiru kroz ravan π u tačkama A_1 i B_1. Dokažite da je $AA_1 = BB_1$!



Sl. 1

18. Segmenti paralelnih pravih (pravaca) između paralelnih ravni (ravnina) su jednaki. — Dokažite!

19. Dvije prave (pravca) a i b koje se sijeku, a paralelne su sa zadanom ravni (ravninom) π, određuju ravan Σ koja je paralelna sa ravni π. — Dokažite!

20. Ako se dvije prave mimoilaze, tada se kroz prvu pravu može položiti samo jedna ravan paralelno sa drugom pravom. — Dokažite!

21. Tri paralelne ravni (ravnine) presijecaju mimoilazne prave (mimosmjerne pravce). — Dokažite da su nastali odgovarajući segmenti proporcionalni!

22. Ako prava (pravac) p prodire kroz jednu od paralelnih ravni (ravnina) π_1 i π_2, onda prodire i kroz drugu. — Dokažite!

23. Kroz tačku M van zadane prave (pravca) p u prostoru povucite pravu koja je paralelna sa zadanom pravom. (Zadatak je konstruktivan.)

24. Kroz tačku A izvan ravni (ravnine) π položite ravan $\Sigma \parallel \pi$.

25. Kroz zadanu pravu (pravac) a postavite ravan (ravninu) koja je paralelna sa drugom zadanom pravom. (Konstrukcija!)

26. Kroz zadanu tačku položite ravan (ravninu) koja je paralelna sa dvije zadane mimoilazne prave (mimosmjerna pravca).

27. Odredite pravu (pravac) p koja će sjeći dvije zadane prave a i b, a paralelna je sa zadanom ravni (ravninom) π. Koliko rješenja ima zadatak?

28. Odredite pravu (pravac) koja će sjeći dvije zadane mimoilazne prave (mimosmjerna pravca), a paralelna je s trećom zadanom pravom.

29. Odredite pravu (pravac) koja je paralelna sa tri zadane nekomplanarne paralelne prave, a od njih je podjednako udaljena.

Normalne prave i ravni (pravci i ravnine)

30. U svakoj tački ravni (ravnine) može se postaviti samo jedna prava (pravac) koja je normalna na tu ravan. — Dokažite!

31. Iz svake tačke izvan ravni (ravnine) može se položiti samo jedna prava (pravac) normalno na tu ravan. — Dokažite!

32. Ako je ravan (ravnina) normalna na jednu od paralelnih pravih (pravaca), ona je normalna i na drugu. — Dokažite!

33. Kako glasi teorema, obrnuta teoremi iz prethodnog zadatka? Dokažite je!

34. Ako je prava (pravac) normalna na jednu od paralelnih ravni (ravnina), ona je normalna i na drugu. — Dokažite!

35. Kako glasi teorema obrnuta teoremi iz prethodnog zadatka? Dokažite je!

36. Ako je prava n normalna na ravan π_1, onda je i ravan π, koja prolazi kroz pravu n, normalna na π_1. — Dokažite!

37. Ako je ravan (ravnina) π normalna na ravan π_1, i ako iz bilo koje tačke M koja leži u ravni π spustimo normalu n na ravan π_1, onda ta normala leži u ravni π. — Dokažite!

38. Kroz zadanu pravu a, koja nije normalna na ravan π, može se položiti samo jedna ravan π_1 koja je normalna na ravan π. — Dokažite!

39. Ako je prava (pravac) p koja prodire kroz ravan (probada ravninu) p normalna na dvije prave a i b koje leže u ravni π, a prolaze kroz tačku P prodora prave p i ravni π, onda je prava p normalna i na svaku treću pravu c koja leži u toj ravni i prolazi kroz tačku P. — Dokažite!

40. U ravni π leže dvije duži (dužine) CD i EF koje se međusobno polove u tački S. Van ravni (ravnine) π leži neka tačka A tako da je $AC = AD$ i $AE = AF$. Dokažite da je $AS \perp \pi$!

41. Ako je prava (pravac) p normalna na bilo koje dvije prave a i b koje se sijeku i leže u ravni (ravnini) π, onda je $p \perp \pi$. — Dokažite!

42. Ako su tri prave (pravca), koje prolaze kroz istu tačku prostora, uzajamno normalne, onda je svaka od njih normalna na ravan (ravninu) koju obrazuju preostale dvije. — Dokažite!

43. Šta je geometrijsko mjesto svih pravih (pravaca) koje prolaze kroz istu tačku T prave a i na njoj su normalne?

44. Ako su dvije prave (pravca) a i b normalne na ravan π, onda je $a \parallel b$. — Dokažite!

45. Ako su ravni (ravnine) π_1 i π_2 paralelne, onda je prava p, koja je normalna na π_1, normalna i na π_2. — Dokažite!

46. Ako je prava (pravac) a normalna na ravan (ravninu) π, onda je svaka prava b koja je normalna na a, paralelna sa π. — Dokažite!

47. Ako je prava (pravac) a normalna na ravan (ravninu) π, onda je svaka ravan π_1 koja je paralelna s pravom a, normalna na ravan π. — Dokažite!

48. Ako su prava (pravac) a i ravan (ravnina) π normalne na pravu b, onda je $a \parallel \pi$. — Dokažite!

49. Ako je ravan (ravnina) $\pi_1 \parallel \pi_2$, onda su sve tačke ravni π_1 jednako udaljene od ravni π_2. — Dokažite!

50. Ako se položi proizvoljna ravan (ravnina) jednom dijagonalom paralelograma, ta je ravan podjednako udaljena od krajnjih tačaka druge dijagonale. — Dokažite!

51. Kroz zadanu tačku M koja leži u ravni π položite normalu na tu ravan. (Zadatak je konstruktivan!)

52. Iz tačke P koja leži van ravni (ravnine) π spustite normalu na tu ravan. (Konstrukcija!)

53. Kroz pravu (pravac) p položite ravan π koja je podjednako udaljena od zadanih tačaka A i B. (Tačke A, B i prava p nisu komplanarne)

54. Kroz pravu (pravac) a koja leži u ravni (ravnini) π položite ravan (ravninu) π_1 normalno na π.

55. Iz tačke M van zadane prave p povucite:

    a) normalu b) paralelu

    s tom pravom.

56. Kroz tačku M koja ne leži na pravoj (pravcu) p položite ravan π (ravninu) koja je normalna na pravu p.

57. Kroz tačku M koja leži na pravoj (pravcu) a položite ravan koja je normalna na pravu a.

58. Zadane su dvije mimoilazne prave (mimosmjerna pravca) a i b. Konstruišite pravu n koja će presijecati prave a i b pod pravim uglom (kutom).

59. Zadane su dvije međusobno normalne mimoilazne prave (mimosmjerna pravca) p_1 i p_2. Njihova najkraća udaljenost $AB = a$. Na jednoj od njih zadana je duž (dužina) $AC = b$, na drugoj $BD = c$ a spojnica $CD = d$. Dokažite da je $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Ortogonalno projiciranje

60. Tjeme (vrh) C pravog ugla (kuta) pravouglog trougla (trokuta) ABC leži u ravni π, a hipotenuza trougla leži paralelno s tom ravni u udaljenosti $d = 4$ cm. Ako su projekcije kateta na ravan π $a' = 12$ cm i $b' = 20$ cm, kolika je projekcija c' hipotenuze c?

61. Dužine dvaju segmenata čije krajnje tačke leže u paralelnim ravnima iznose $d_1 = 13$ cm i $d_2 = 12$ cm, a njihove projekcije na jednu od tih ravni se odnose $d_1' : d_2' = 5 : 9$. Kolika je udaljenost između tih ravni?

62. Ako se iz iste tačke A van ravni π povuku kose duži (dužine) onda su:

a) dvije kose duži jednake ako su im projekcije jednake;

b) dužoj projekciji odgovara duža kosa duž. — Dokažite!

63. Prava (pravac) a, povučena u ravni (ravnini) π kroz prodor C kose prave b normalno na projekciju b' prave b u ravni π, normalna je i na toj kosoj pravoj b. — Dokažite!

64. Projekcija prave (pravca) na ravan (ravninu) je prava. — Dokažite!

65. Projekcije dviju paralelnih pravih (pravaca) na istu ravan međusobno su paralelne. — Dokažite!

66. Zadana je duž (dužina) AB svojom projekcijom $A'B'$ tako da tačka A ima kotu $+1$, a kota tačke B je $+4$. Odredite konstrukcijom pravu veličinu duži AB.

67. Zadana je duž (dužina) AB svojom projekcijom $A'B'[A'(+2), B'(-3)]$. Odredite pravu veličinu duži AB.

68. Izračunajte pravu veličinu duži (dužine) AB ako je zadana ortogonalna projekcija $A'B'$ i kote AA' i BB', i to:

a) $A'B' = 12$ cm, $AA' = 2$ cm, $BB' = 7$ cm;

b) $A'B' = 8$ cm, $AA' = -2$ cm, $BB' = +4$ cm.

69. Konstruišite trougao (trokut) ABC u pravoj veličini ako je zadan svojom projekcijom $A'B'C'$ i kotama $AA' = 1$ cm, $BB' = 2$ cm, $CC' = 3$ cm.

70. Paralelogram $ABCD$ zadan je svojom projekcijom $A'B'C'D'$ i kotama $AA' = 1$ cm, $BB' = 2$ cm i $CC' = 3$ cm. Odredite konstrukcijom kotu tačke D.

71. Ako je ortogonalna projekcija a' prave (pravca) a u ravni (ravnini) π normalna na pravoj b te ravni, onda je i prava a normalna na b. — Dokažite!

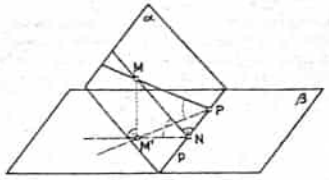
72. Kako glasi obrat teoreme iz prethodnog zadatka? — Dokažite je!

Uglovi u prostoru. Diedar

73. Šta se smatra uglom (kutom) dviju mimoilaznih pravih (mimosmjernih pravaca)?

74. Ugao (kut) između kose prave (pravca) i ravni (ravnine) najmanji je od svih uglova koje zatvara prava sa pravima koje su povučene u toj ravni kroz njezin prodor (probodište). — Dokažite!

75. Između svih pravih, koje prolaze kroz neku tačku M ravni α (sl. 2), najveći ugao (kut) sa nekom drugom ravni β zatvara normala MN, spuštena iz tačke M na liniju presjeka (presječnicu) p ravni α i β. — Dokažite!



Sl. 2

76. Odredite geometrijsko mjesto prodora (probodišta) svih pravih (pravaca) koje prolaze kroz tačku M izvan ravni (ravnine) π, a čine s tom ravni jednake nagibne uglove (priklone kutove).

77. Odredite geometrijsko mjesto tačaka ravni (ravnine) π koje su podjednako udaljene od tačke M van te ravni.

78. Odredite konstrukcijom nagibni ugao (prikloni kut) dijagonale kocke prema njezinoj bazi.

79. Konstruišite nagibni ugao (prikloni kut) prostorne dijagonale pravouglog paralelepipeda (kvadra) s njegovom bazom ako su njegove dimenzije: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

80. Zadan je pravilni tetraedar (trostrana jednakoivična piramida). Odredite konstrukcijom: a) nagibni ugao (prikloni kut) α njegove ivice (brida) prema bazi b) ugao diedra dviju njegovih susjednih strana.

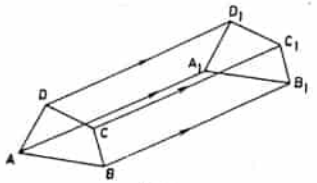
81. a) Konstruišite nagibni ugao (prikloni kut, ugao diedra) koji zatvara bočna strana pravilne četvorostrane piramide sa bazom ako su osnovne ivice (bridovi) $a = 4$ cm, a bočna ivica $b = 5$ cm.

b) Konstruišite nagibni ugao bočne ivice prema bazi.

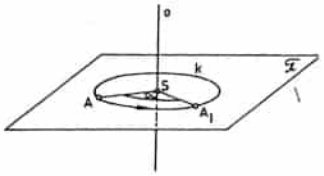
2. Translacija, rotacija i simetrija u prostoru

Prostorna figura može da se pomakne u prostoru tako da sve njezine tačke opišu duži (dužine) paralelne, jednake i istog smjera. Takvo kretanje u prostoru zovemo translacija (sl. 3).

Neka je u prostoru zadana prava (pravac) o i tačka A van nje. Položimo kroz tu tačku ravan (ravninu) π normalno na pravu o. Ravan π presijeca pravu o u nekoj tački S. Opišimo oko S kružnicu k radijusa SA u ravni π. Ako se tačka A kreće po kružnici k, kažemo da tačka rotira oko ose (osi) o. Ako pri rotaciji tačka A dođe u položaj A_1 (sl. 4) tako da je ugao (kut) $ASA_1 = \alpha$, onda kažemo da je tačka A izvršila rotaciju oko ose o za ugao α.



Sl. 3



Sl. 4

Ako sve tačke neke prostorne figure izvrše rotaciju u istom smislu za isti ugao α oko neke čvrste ose o, onda kažemo da je figura izvršila rotaciju za ugao α oko ose o.

Dvije tačke A i A_1 su simetrične u odnosu na neku tačku S ako je tačka S sredina duži (dužine) AA_1. Tačka S se zove centar simetrije, a sama simetrija nosi naziv centralna simetrija.

Ako svakoj tački A_1 neke figure odgovara centralno simetrična tačka A_2 druge figure i, obrnuto, ako svakoj tački B_2 druge figure odgovara centralno simetrična tačka B_1 prve figure s obzirom na isti centar simetrije S, onda kažemo da su te dvije figure centralno simetrične.

Dvije tačke A_1 i A_2 su simetrične u odnosu na zadanu pravu (pravac) o ako je ta prava simetrala duži (dužine) A_1A_2. Prava o se zove osa (os) simetrije.

Dvije figure su osno ili aksijalno simetrične s obzirom na neku osu simetrije ako svakoj tački A_1 jedne figure pripada aksijalno simetrična tačka A_2 druge figure i, obrnuto, ako svakoj tački B_2 druge figure pripada aksijalno simetrična tačka B_1 prve figure.

Ravan koja je normalna na duž (dužinu) A_1A_2 i prolazi kroz njezino polovište, zove se simetralna ravan duži A_1A_2.

Dvije tačke A_1 i A_2 su simetrične u odnosu na neku ravan (ravninu) ako je ta ravan simetralna ravan duži A_1A_2.

Dvije figure su simetrične s obzirom na neku ravan ako svakoj tački A_1 prve figure pripada simetrična tačka A_2 druge figure i, obrnuto, ako svakoj tački B_2 druge figure pripada simetrična tačka B_1 prve figure.

82. Pri translaciji ostaju pripadne prave (pravci) i pripadne ravni (ravnine) paralelne sa početnim položajem, pripadne duži (dužine) jednake, a pripadne figure podudarne (skladne). — Dokažite!

83. Centralno simetrične duži (dužine) su paralelne i jednake. — Dokažite!

84. Odredite geometrijsko mjesto tačaka u prostoru koje su podjednako udaljene od vrhova trougla ABC.

85. Geometrijsko mjesto tačaka u prostoru koje su jednako udaljene od strana diedra je ravan (ravnina) koja prolazi kroz ivicu (brid) diedra i raspolavlja ga. — Dokažite!

86. Odredite geometrijsko mjesto tačaka u prostoru koje su podjednako udaljene od dviju pravih (pravaca) koje se sijeku.

87. Koja je tačka centar simetrije:
a) kocke
b) pravilne četvorostrane prizme
c) pravouglog paralelepipeda
d) pravilnog tetraedra?

88. Koliko osa (osi) simetrije ima:
a) kocka
b) pravilna četvorostrana prizma
c) pravougli paralelepiped
d) pravilan tetraedar?

89. Koliko ravni (ravnina) simetrije ima:
a) kocka
b) pravilna četvorostrana prizma
c) pravougli paralelepiped
d) pravilan tetraedar?

90. Izvan ravni (ravnine) π zadane su tačke P i Q. U ravni π treba naći tačke koje su podjednako udaljene od tačaka P i Q.

91. Tačke A i B leže u istom poluprostoru u odnosu na ravan (ravninu) π. Odredite u ravni π tačku C tako da $AC + BC$ bude minimalno.

3. Rogalj, triedar

Ako povučemo u prostoru tri ili više polupravih (polupravaca, zraka) koje ne leže u istoj ravni (ravnini) i kroz svake dvije susjedne poluprave položimo ravan, nastaje geometrijska figura koja se zove rogalj (prostorni ugao).

Po dvije susjedne ivice (brida) čine ivični ugao ili stranu roglja. Po dvije susjedne strane čine diedar roglja. Zajednička tačka svih ivica roglja je njegovo tjeme ili vrh.

Rogalj je konveksan ako leži sav samo s jedne strane ravni svake njegove strane, a konkavan ako ga siječe ravan s ma koje njegove strane.

Rogalj može biti trostran, četvorostran, petostran itd. Trostrani rogalj se zove triedar (trostrani ugao).

Ako iz bilo koje tačke unutar roglja spustimo normale na sve njegove strane, onda te normale, uzete kao ivice, određuju nov rogalj koji se zove polarni rogalj zadanom roglju.

92. Strana (ivični ugao, bridni kut) svakog triedra je manja od sume druge dvije strane a veća od njihove razlike. — Dokažite!

93. U svakom triedru nasuprot jednakih diedara leže jednake strane. — Dokažite!

94. Kako glasi teorema obrnuta teoremi iz prethodnog zadatka?

95. U svakom triedru nasuprot većeg diedra leži veća strana. — Dokažite!

96. Kako glasi teorema obrnuta teoremi iz prethodnog zadatka?

97. Suma strana svakog konveksnog roglja je manja od punog ugla (kuta). — Dokažite!

98. Svaki rogalj je polaran svom polarnom roglju. — Dokažite!

99. Svaka strana roglja je suplementna odgovarajućem diedru njemu polarnog roglja. — Dokažite!

100. Suma nagibnih uglova (diedara) n-tostranog roglja manja je od $n \cdot 180°$ a veća od $(n-2)180°$.

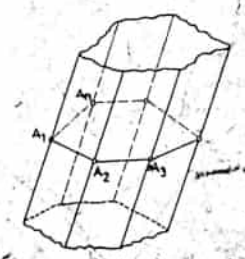
101. Zadane su dvije strane a i b triedra i ugao (kut) diedra koji zatvaraju te strane. Konstrukcijom nadite ostale elemente triedra!

102. Zadane su strane a, b i c triedra. Konstrukcijom nadite njegove diedre.

4. Prizma

Konačna geometrijska figura, ograničena samo dijelovima ravni (ravnina), zove se poliedar. Poligoni kao dijelovi tih ravni, koji omeđuju poliedar, zovu se njegove strane. Susjedne strane sijeku se u ivicama (bridovima) poliedra. Tačke poliedra u kojima se sastaju tri ili više ivica zovu se njegova tjemena (vrhovi). Duž (dužina) koja spaja dva vrha poliedra, a ne leži ni na jednoj njegovoj strani, zove se prostorna dijagonala poliedra ili, kraće, dijagonala poliedra.

Neka je zadan poligon $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ i prava (pravac) p koja ne leži u ravni (ravnjni) poligona. Ako prava izvrši translaciju (sl. 5) po konturi poligona, ona će opisati u prostoru prizmatičku površinu. Dio prostora unutar te površine se zove prizmatički prostor. Dijelovi ravni koji nastaju pri opisanoj translaciji zovu se strane prizmatičke površine. Po dvije susjedne strane sijeku se u ivici (bridu) prizmatičke površine. Presiječemo li prizmatičku površinu sa dvije paralelne ravni (ravnine) koje sijeku sve njezine ivice, nastaje zatvoreni prostor, koji se zove prizma.



Sl. 5

Presjeci prizmatičke površine u pomenutim paralelnim ravnima zovu se baze, osnove (osnovke) prizme. Dijelovi strana prizmatičke površine koji omeđuju prizmu zovu se bočne strane (pobočke) prizme. Sve bočne strane čine bočnu površinu (omotač, pobočje) prizme.

Prizma, čija je baza paralelogram, zove se paralelepiped.

Ivice (bridovi) u kojima se sijeku osnove i bočne strane prizme zovu se osnovne ivice, a one u kojima se sijeku po dvije susjedne bočne strane zovu se bočne ivice prizme.

Udaljenost između baza prizme zove se njezina visina.

Ako je B mjerni broj površine baze prizme, M mjerni broj njezine bočne površine, a H visina prizme, onda je površina prizme

$$P = 2B + M$$

a zapremina (volumen)

$$V = BH.$$

Presjeci prizme

103. Svaki ravni presjek paralelepipeda kojim su presječene njegove četiri ivice, je paralelogram. — Dokažite!

104. Ivica (brid) pravilne trostrane prizme je a. Kroz njezinu osnovnu ivicu prolazi ravan (ravnina) koja zatvara ugao (kut) od 45° sa bazom prizme i siječe suprotnu bočnu ivicu. Kolika je površina dobivenog presjeka prizme?

105. Odredite najkraću udaljenost ivice (brida) kocke od njezine dijagonale koja se ne siječe sa tom ivicom.

106. Suprotne strane paralelepipeda su paralelne i podudarne. — Dokažite!

107. Sve prostorne dijagonale paralelepipeda sijeku se u jednoj istoj tački koja polovi svaku dijagonalu. — Dokažite!

108. Koliki su dijagonalni presjeci kvadra (pravouglog paralelepipeda) čije su ivice (bridovi) $a=3$, $b=4$, $c=5$?

109. Ako se kocka presiječe sa ravni (ravninom) koja prolazi polovištem dijagonale i na njoj je normalna, nastali presjek je pravilni šestougao (šesterokut). — Dokažite!

110. Ako su dvije susjedne bočne strane (pobočke) prizme pravougaonici (pravokutnici), prizma je prava (uspravna). — Dokažite!

111. U pravouglom (pravokutnom) paralelepipedu je kvadrat dijagonale jednak sumi kvadrata njegovih triju dimenzija. — Dokažite!

112. Dijagonale kvadra su jednake. — Dokažite!

113. Zadani su mjerni brojevi dijagonala kvadra koje polaze iz istog tjemena (vrha) i leže u raznim stranama, te iznose d_1, d_2 i d_3. Kolika je prostorna dijagonala kvadra?

114. Suma uglova (kutova) koje zatvaraju sve ivice (bridovi) n-tostrane prizme iznosi $8(n-1)R$. — Dokažite!

115. Ako sva tjemena (vrhovi) paralelepipeda leže s jedne strane neke ravni (ravnine), onda je udaljenost presječne tačke dijagonala od te ravni jednaka osmini sume udaljenosti svih vrhova (tjemena) paralelepipeda od iste ravni. — Dokažite!

116. Kocku presijeca ravan (ravnina) koja prolazi kroz tri tačke A, B i C koje leže na njenim bočnim ivicama (bridovima). Konstruišite presjek!

117. Konstruišite presjek kocke koji se dobije pomoću ravni (ravnine) koja prolazi dijagonalom kocke normalno na dijagonalni presjek koji sadrži tu dijagonalu.

118. Konstruišite presjek paralelepipeda ako presječna ravan (ravnina) prolazi kroz tri tačke A, B i C na ivicama (bridovima) paralelepipeda.

119. Konstruišite ravni presjek petostrane prizme ako su zadane tri tačke A, B i C na bočnim ivicama (bridovima) kroz koje mora proći presječna ravan (ravnina).

120. U kakvim figurama presijecaju kocku ravni (ravnine) koje dijele njezinu dijagonalu na tri jednaka dijela i normalne su na njoj?

Površina (oplošje) i zapremina (volumen) prizme

121. Ivica kocke je a, prostorna dijagonala D, površina P i zapremina (volumen) V. Izračunajte preostale nepoznate veličine ako je zadano:

a) $P=486$ b) $V=512$ c) $D=4\sqrt{3}$ d) $P=V$ (jednaki mjerni brojevi).

122. Ivica (brid) kocke je a. Kolika je dijagonala one kocke koja ima dvostruko veću površinu (oplošje)?

123. Površina (oplošje) kocke iznosi 294 cm². Kolika je:

a) ivica (brid) b) dijagonala jedne strane c) prostorna dijagonala?

124. Ivice (bridovi) dviju kocaka se odnose kao 3:2, a njihove površine se razlikuju za 120. Kolike su ivice?

125. Pri svakom tjemenu (vrhu) kocke odsječeni su rogljevi tako da presječna ravan (ravnina) prolazi kroz sredine ivica (bridova) koji se sustiču u jednom tjemenu (vrhu). Odredite površinu (oplošje) i zapreminu (volumen) preostalog dijela.

126. Površina najvećeg jednakostraničnog trougla (trokuta) koji se može dobiti presijecanjem kocke iznosi $2\sqrt{3}$. Kolika je površina i zapremina (volumen) kocke?

127. Površina dijagonalnog presjeka kocke iznosi $9\sqrt{2}$. Kolika je površina i zapremina kocke?

128. Kod pravilne četvorostrane prizme je osnovna ivica (brid) a, bočna ivica b, prostorna dijagonala D, površina P i zapremina (volumen) V. Od tih pet veličina su zadane dvije, a preostale tri treba odrediti ako je:

a) $a=2$, $b=1$ b) $D=3$, $a=2$ c) $D=9$, $b=7$

d) $P=256$, $a=8$ e) $V=144$, $b=1$ f) $a:b=2:1$, $V=256$

g) $P=V$ (jednaki mjerni brojevi), $a=2b$ h) $V=4P$, $a:b=2:1$.

129. Ivice (bridovi) pravouglog (pravokutnog) paralelepipeda (kvadra) su a, b i c, prostorna dijagonala D, površina P i zapremina (volumen) V. Zadane su tri od tih veličina, a preostale tri treba odrediti ako je:

a) $a=2$, $b=3$, $c=6$ b) $a=1$, $b=8$, $D=9$

c) $a=4$, $b=8$, $P=88$ d) $a=6$, $b=18$, $V=108$

e) $a:c=1:3$, $b:c=1:2$, $D=14$ f) $a:b=1:6$, $b:c=1:3$, $P=264$.

130. Metalna kocka zapremine (volumena) 288 treba da se pretopi u kvadar čije se ivice (bridovi) odnose kao 2:3:6. Kolike će biti ivice kvadra?

131. Ivice (bridovi) kvadra se odnose kao 2:3:6, a prostorna dijagonala iznosi 21. Kolika je površina i zapremina (volumen) kvadra?

105. Odredite najkraću udaljenost ivice (brida) kocke od njezine dijagonale koja se ne siječe sa tom ivicom.

106. Suprotne strane paralelepipeda su paralelne i podudarne. — Dokažite!

107. Sve prostorne dijagonale paralelepipeda sijeku se u jednoj istoj tački koja polovi svaku dijagonalu. — Dokažite!

108. Koliki su dijagonalni presjeci kvadra (pravouglog paralelepipeda) čije su ivice (bridovi) $a=3$, $b=4$, $c=5$?

109. Ako se kocka presiječe sa ravni (ravninom) koja prolazi polovištem dijagonale i na njoj je normalna, nastali presjek je pravilni šestougao (šesterokut). — Dokažite!

110. Ako su dvije susjedne bočne strane (pobočke) prizme pravougaonici (pravokutnici), prizma je prava (uspravna). — Dokažite!

111. U pravouglom (pravokutnom) paralelepipedu je kvadrat dijagonale jednak sumi kvadrata njegovih triju dimenzija. — Dokažite!

112. Dijagonale kvadra su jednake. — Dokažite!

113. Zadani su mjerni brojevi dijagonala kvadra koje polaze iz istog tjemena (vrha) i leže u raznim stranama, te iznose d_1, d_2 i d_3. Kolika je prostorna dijagonala kvadra?

114. Suma uglova (kutova) koje zatvaraju sve ivice (bridovi) n-tostrane prizme iznosi $8(n-1)R$. — Dokažite!

115. Ako sva tjemena (vrhovi) paralelepipeda leže s jedne strane neke ravni (ravnine), onda je udaljenost presječne tačke dijagonala od te ravni jednaka osmini sume udaljenosti svih vrhova (tjemena) paralelepipeda od iste ravni. — Dokažite!

116. Kocku presjeca ravan (ravnina) koja prolazi kroz tri tačke A, B i C koje leže na njenim bočnim ivicama (bridovima). Konstruišite presjek!

117. Konstruišite presjek kocke koji se dobije pomoću ravni (ravnine) koja prolazi dijagonalom kocke normalno na dijagonalni presjek koji sadrži tu dijagonalu.

118. Konstruišite presjek paralelepipeda ako presječna ravan (ravnina) prolazi kroz tri tačke A, B i C na ivicama (bridovima) paralelepipeda.

119. Konstruišite ravni presjek petostrane prizme ako su zadane tri tačke A, B i C na bočnim ivicama (bridovima) kroz koje mora proći presječna ravan (ravnina).

120. U kakvim figurama presijecaju kocku ravni (ravnine) koje dijele njezinu dijagonalu na tri jednaka dijela i normalne su na njoj?

Površina (oplošje) i zapremina (volumen) prizme

121. Ivica kocke je a, prostorna dijagonala D, površina P i zapremina (volumen) V. Izračunajte preostale nepoznate veličine ako je zadano:

a) $P=486$ b) $V=512$ c) $D=4\sqrt{3}$ d) $P=V$ (jednaki mjerni brojevi).

122. Ivica (brid) kocke je a. Kolika je dijagonala one kocke koja ima dvostruko veću površinu (oplošje)?

123. Površina (oplošje) kocke iznosi 294 cm². Kolika je:

a) ivica (brid) b) dijagonala jedne strane c) prostorna dijagonala?

124. Ivice (bridovi) dviju kocaka se odnose kao 3:2, a njihove površine se razlikuju za 120. Kolike su ivice?

125. Pri svakom tjemenu (vrhu) kocke odsječeni su rogljevi tako da presječna ravan (ravnina) prolazi kroz sredine ivica (bridova) koji se sustiču u jednom tjemenu (vrhu). Odredite površinu (oplošje) i zapreminu (volumen) preostalog dijela.

126. Površina najvećeg jednakostraničnog trougla (trokuta) koji se može dobiti presijecanjem kocke iznosi $2\sqrt{3}$. Kolika je površina i zapremina (volumen) kocke?

127. Površina dijagonalnog presjeka kocke iznosi $9\sqrt{2}$. Kolika je površina i zapremina kocke?

128. Kod pravilne četvorostrane prizme je osnovna ivica (brid) a, bočna ivica b, prostorna dijagonala D, površina P i zapremina (volumen) V. Od tih pet veličina su zadane dvije, a preostale tri treba odrediti ako je:

a) $a=2$, $b=1$ b) $D=3$, $a=2$ c) $D=9$, $b=7$

d) $P=256$, $a=8$ e) $V=144$, $b=1$ f) $a:b=2:1$, $V=256$

g) $P=V$ (jednaki mjerni brojevi), $a=2b$ h) $V=4P$, $a:b=2:1$.

129. Ivice (bridovi) pravouglog (pravokutnog) paralelepipeda (kvadra) su a, b i c, prostorna dijagonala D, površina P i zapremina (volumen) V. Zadane su tri od tih veličina, a preostale tri treba odrediti ako je:

a) $a=2$, $b=3$, $c=6$ b) $a=1$, $b=8$, $D=9$

c) $a=4$, $b=8$, $P=88$ d) $a=6$, $b=18$, $V=108$

e) $a:c=1:3$, $b:c=1:2$, $D=14$ f) $a:b=1:6$, $b:c=1:3$, $P=264$.

130. Metalna kocka zapremine (volumena) 288 treba da se pretopi u kvadar čije se ivice (bridovi) odnose kao 2:3:6. Kolike će biti ivice kvadra?

131. Ivice (bridovi) kvadra se odnose kao 2:3:6, a prostorna dijagonala iznosi 21. Kolika je površina i zapremina (volumen) kvadra?

132. Dijagonalni presjek kvadra je kvadrat površine 400, a osnovne ivice (bridovi) se odnose kao 3 : 4. Odredite ivice, prostornu dijagonalu, površinu i zapreminu (volumen) kvadra.

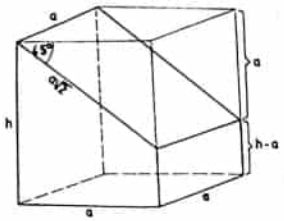
133. Kolika je zapremina (volumen) kocke koja ima površinu jednaku površini kvadra čije su ivice (bridovi) $a = 12$, $b = 20$, $c = 30$?

134. Ako su brojno jednake površina i zapremina (volumen) kvadra, onda je suma recipročnih vrijednosti ivica (bridova) kvadra jednaka $\frac{1}{2}$. — Dokažite!

135. Pravilna četvorostrana prizma osnovne ivice (brida) a i visine $h\,(h > a\sqrt{3})$ presječena je (sl. 6) sa ravni (ravninom) koja prolazi kroz ivicu gornje baze i s njom zatvara ugao (kut) od

a) 45° b) 30° c) 60°.

Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) donjeg dijela prizme.



Sl. 6

136. Baza prizme je jednakokraki pravougli trougao (pravokutni trokut) čija je osnovica a i krak b; visina prizme je c, površina (oplošje) P i zapremina (volumen) V. Odredite nepoznate od tih veličina ako je zadano:

a) $b = 3$, $c = 5$ b) $a = 4$, $c = 10$

c) $P = 4(5 + 2\sqrt{2})$, $b = 2$ d) $V = 40$, $a = 4\sqrt{2}$.

137. Baza prizme je pravougli trougao (pravokutni trokut) čije su katete a i b a hipotenuza c; visina prizme je H, površina P i zapremina (volumen) V. Nađite nepoznate od tih veličina ako je poznato:

a) $a = 12$, $b = 5$, $H = 4$ b) $a = 3$, $c = 5$, $P = 84$

c) $a = 6$, $c = 10$, $V = 72$ d) $b = 3$, $H = 2$, $V = 12$.

138. Baza prizme je pravougli trougao (pravokutni trokut) čije su katete a i b. Izrazite površinu i zapreminu (volumen) prizme kao funkciju veličina a i b ako je visina prizme jednaka hipotenuzi trougla.

139. Svaka bočna strana pravilne trostrane prizme jednaka je bazi B prizme. Izrazite:

a) površinu P prizme kao funkciju radijusa r kružnice upisane u bazu prizme;

b) radijus r kružnice upisane u bazu prizme, kao funkciju njezine površine P.

140. Površina pravilne trostrane prizme iznosi $P = 20\sqrt{3}$, a osnovna ivica (brid) $a = 4$. Izračunajte visinu H prizme.

141. Baza prave prizme je jednakokraki trougao (trokut) čija je osnovica a i krak b. Izračunajte visinu prizme ako je njezina površina P.

142. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) prave (uspravne) trostrane prizme ako su osnovne ivice (bridovi) a, b, c a visina H:

a) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, $H = 10$. b) $a = 15$, $b = 13$, $c = 4$, $H = 2$.

143. Baza prave (uspravne) četvorostrane prizme je trapez čije su osnovice $a = 20$, $c = 6$ a kraci $b = 13$ i $d = 15$; visina prizme je $H = 10$. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) prizme.

144. Osnovna ivica (brid) pravilne šestostrane prizme je a, visina H, površina P i zapremina (volumen) V. Od pomenutih veličina nađite nepoznate ako je zadano:

a) $a = 2$, $H = 3$ b) $a : H = 1 : 2$, $V = 24\sqrt{3}$

c) $a : H = 3 : 2$, $P = 9(4 + 3\sqrt{3})$.

132. Dijagonalni presjek kvadra je kvadrat površine 400, a osnovne ivice (bridovi) se odnose kao 3 : 4. Odredite ivice, prostornu dijagonalu, površinu i zapreminu (volumen) kvadra.

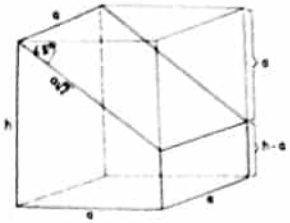
133. Kolika je zapremina (volumen) kocke koja ima površinu jednaku površini kvadra čije su ivice (bridovi) $a = 12$, $b = 20$, $c = 30$?

134. Ako su brojno jednake površina i zapremina (volumen) kvadra, onda je suma recipročnih vrijednosti ivica (bridova) kvadra jednaka $\frac{1}{2}$. — Dokažite!

135. Pravilna četvorostrana prizma osnovne ivice (brida) a i visine $h\,(h > a\sqrt{3})$ presječena je (sl. 6) sa ravni (ravninom) koja prolazi kroz ivicu gornje baze i s njom zatvara ugao (kut) od

a) 45° **b)** 30° **c)** 60°.

Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) donjeg dijela prizme.



Sl. 6

136. Baza prizme je jednakokraki pravougli trougao (pravokutni trokut) čija je osnovica a i krak b; visina prizme je c, površina (oplošje) P i zapremina (volumen) V. Odredite nepoznate od tih veličina ako je zadano:

a) $b = 3$, $c = 5$ **b)** $a = 4$, $c = 10$

c) $P = 4(5 + 2\sqrt{2})$, $b = 2$ **d)** $V = 40$, $a = 4\sqrt{2}$.

137. Baza prizme je pravougli trougao (pravokutni trokut) čije su katete a i b a hipotenuza c; visina prizme je H, površina P i zapremina (volumen) V. Nađite nepoznate od tih veličina ako je poznato:

a) $a = 12$, $b = 5$, $H = 4$ **b)** $a = 3$, $c = 5$, $P = 84$

c) $a = 6$, $c = 10$, $V = 72$ **d)** $b = 3$, $H = 2$, $V = 12$.

138. Baza prizme je pravougli trougao (pravokutni trokut) čije su katete a i b. Izrazite površinu i zapreminu (volumen) prizme kao funkciju veličina a i b ako je visina prizme jednaka hipotenuzi trougla.

139. Svaka bočna strana pravilne trostrane prizme jednaka je bazi B prizme. Izrazite:

a) površinu P prizme kao funkciju radijusa r kružnice upisane u bazu prizme;

b) radijus r kružnice upisane u bazu prizme, kao funkciju njezine površine P.

140. Površina pravilne trostrane prizme iznosi $P = 20\sqrt{3}$, a osnovna ivica (brid) $a = 4$. Izračunajte visinu H prizme.

141. Baza prave prizme je jednakokraki trougao (trokut) čija je osnovica a i krak b. Izračunajte visinu prizme ako je njezina površina P.

142. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) prave (uspravne) trostrane prizme ako su osnovne ivice (bridovi) a, b, c a visina H:

a) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, $H = 10$ **b)** $a = 15$, $b = 13$, $c = 4$, $H = 2$.

143. Baza prave (uspravne) četverostrane prizme je trapez čije su osnovice $a = 20$, $c = 6$ a kraci $b = 13$ i $d = 15$; visina prizme je $H = 10$. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) prizme.

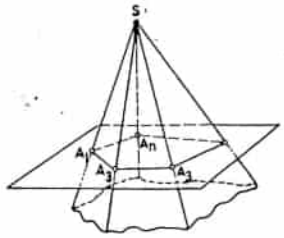
144. Osnovna ivica (brid) pravilne šestostrane prizme je a, visina H, površina P i zapremina (volumen) V. Od pomenutih veličina nađite nepoznate ako je zadano:

a) $a = 2$, $H = 3$ **b)** $a : H = 1 : 2$, $V = 24\sqrt{3}$

c) $a : H = 3 : 2$, $P = 9(4 + 3\sqrt{3})$.

5. Piramida

Ako sve ivice (bridove) roglja (prostornog ugla) (sl. 7) presiječemo jednom ravni koja ne prolazi kroz vrh S roglja, nastaje poliedar koji se zove piramida. Poligon $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ je baza (osnova, osnovica) piramide, a trouglovi (trokuti) $A_1 A_2 S$, $A_2 A_3 S, \ldots,$ $A_n A_1 S$ su bočne strane (pobočke) piramide. Skup svih bočnih strana je omotač piramide.



Sl. 7

Tjeme (vrh) roglja je vrh piramide a njegova udaljenost od baze zove se visina piramide.

Ivice (bridovi) roglja od kojeg je nastala piramida zovu se bočne ivice piramide, a stranice baze su osnovne ivice piramide.

Ako je baza piramide pravilan poligon, a sve bočne ivice jednake, piramida se zove pravilna. Ako su sve ivice piramide jednake, onda je to jednakoivična (jednakobridna) piramida.

Prema broju stranica baze piramida je trostrana, četvorostrana, petostrana itd. Trostrana piramida se zove tetraedar.

Skup svih zajedničkih tačaka piramide i ravni koja je siječe zove se ravni presjek piramide. Ravni presjek piramide, čija je ravan (ravnina) određena vrhom i dijagonalom baze, zove se dijagonalni presjek piramide.

Ravni presjek piramide koji je paralelan sa bazom zove se paralelni presjek piramide. Ravni presjek piramide čija ravan presijeca ravan njene baze zove se kosi presjek piramide.

Površine paralelnih presjeka piramide odnose se kao kvadrati njihovih udaljenosti od vrha.

Ako je B površina baze piramide, M njezina bočna površina a H visina, onda je površina piramide

$$P = B + M$$

a zapremina (volumen)

$$V = \frac{BH}{3}.$$

Presjeci piramide

145. Suma svih uglova (kutova) između ivica (bridova) n-tostrane piramide iznosi $4(n-1)R$. — Dokažite!

146. Ako se tetraedar presiječe sa ravni (ravninom) koja je paralelna sa dvije mimobilazne ivice (mimosmjerna brida), presjek je paralelogram. — Dokažite!

147. Baza svake piramide jednakih bočnih ivica (bridova) je tetivni poligon. — Dokažite!

148. Mimoilazne ivice (mimosmjerni bridovi) pravilnog tetraedra među sobom su normalne. — Dokažite!

149. Duži (dužine) koje spajaju svako tjeme (vrh) tetraedra sa težištem suprotne strane sijeku se u istoj tački koja dijeli svaku od tih duži u razmjeri (omjeru) 3 : 1 računajući od vrha (tjemena). — Dokažite!

150. Simetralne ravni (ravnine) bilo koje trostrane piramide imaju jednu zajedničku tačku. — Dokažite!

151. Simetralne ravni (ravnine) svih ivica (bridova) tetraedra imaju jednu zajedničku tačku koja je podjednako udaljena od svih vrhova (tjemena) tetraedra. — Dokažite!

152. U svakoj piramidi je bočna površina (pobočje) veća od baze. — Dokažite!

153. Visina H piramide, čija je baza B, podijeljena je na tri jednaka dijela i kroz dijelišne tačke postavljene ravni (ravnine) paralelno s bazom. Kolike su površine presjeka u kojima te ravni presijecaju piramidu?

154. Odredite površine paralelnih presjeka piramide čija je baza $B = 64\ \text{cm}^2$ ako presjeci dijele visinu na četiri jednaka dijela.

155. U kojoj udaljenosti od vrha treba presjeći paralelno s bazom piramidu visine H, da bi površina presjeka bila:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{25}$

površine B baze piramide?

156. U pravilnoj četvorostranoj piramidi, čija je osnovna ivica (brid) a, a bočna $\frac{3}{4}a$, smještena je kocka tako da gornja njezina baza predstavlja presjek piramide. Kolika je ivica kocke?

157. Baza šestostrane piramide iznosi $72\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, a visina $H = 12$ cm. U kojoj udaljenosti od vrha treba presjeći piramidu paralelno s bazom tako da površina presjeka iznosi $8\sqrt{3}$?

158. Osnovna ivica (brid) pravilne šestostrane piramide iznosi $a = 6$ cm a visina $H = 12$ cm. U kojoj udaljenosti od baze treba presjeći piramidu paralelno s njom tako da površina presjeka iznosi $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$?

159. Rogalj je presječen dvjema paralelnim ravnima (ravninama) tako da su presječene sve njegove ivice (bridovi). Kolike su površine P_1 i P_2 presjeka ako su odsječci na jednoj ivici d_1 i d_2, računajući od vrha roglja, a razlika površina presjeka iznosi R?

160. Dvije piramide imaju jednake baze, a visina jedne od njih je dvaput duža od visine druge. Kako se odnose površine paralelnih presjeka tih piramida ako su presječene u istoj udaljenosti od baze, a ta udaljenost iznosi $\frac{2}{3}$ kraće visine?

161. Konstruišite ravni presjek četvorostrane piramide ako ravan (ravnina) prolazi kroz tri tačke A, B i C na bočnim ivicama (bridovima) piramide.

162. Konstruišite ravni presjek petostrane piramide ako ravan (ravnina) prolazi kroz tri tačke A, B i C na trima, redom odabranim, bočnim ivicama (bridovima) piramide.

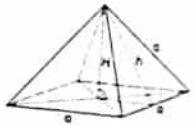
163. Proizvoljnu četvorostranu piramidu treba presjeći tako da nastali ravni presjek bude paralelogram.

164. Izračunajte površinu presjeka pravilne trostrane piramide ako presječnu ravan (ravninu) određuju visine bočnih strana. Osnovna ivica je a, a visina piramide je H.

165. Odredite površinu ravnog presjeka pravilne četvorostrane piramide osnovne ivice (brida) a i visine H ako je presječna ravan (ravnina) određena bočnim visinama koje pripadaju dvjema susjednim osnovnim ivicama.

166. Osnovna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide je a, a bočna ivica zatvara sa bazom ugao (kut) od 60°. Kroz tjeme (vrh) na bazi je položena ravan (ravnina) normalno na suprotnu ivicu. Izračunajte površinu nastalog ravnog presjeka piramide.

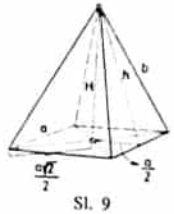
167. Neka je a ivica (brid), h visina bočne strane (pobočke), a H visina jednakoivične četvorostrane piramide (sl. 8). Izračunajte svaku nepoznatu od te tri veličine ako je zadano:



Sl. 8

a) a b) h c) H.

168. Neka je a osnovna ivica (brid), b bočna ivica, h visina bočne strane i H visina pravilne četvorostrane piramide (sl. 9). Odredite nepoznate od te četiri veličine ako je zadano:



Sl. 9

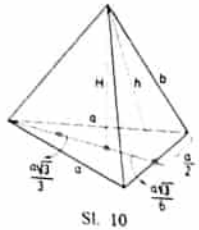
a) a, b b) a, h c) a, H

d) b, h e) b, H f) h, H.

169. Zadana je visina H i osnovna ivica (brid) a pravilne trostrane piramide. Izračunajte njezinu bočnu ivicu b i visinu h bočne strane (sl. 10).

170. a) Iz poznate ivice (brida) a pravilnog tetraedra izračunajte njegovu visinu H.

b) Iz poznate visine H pravilnog tetraedra izračunajte njegovu ivicu a.



Sl. 10

Površina (oplošje) i zapremina (volumen) piramide

171. Osnovna ivica (brid) pravilne trostrane piramide iznosi a, bočna ivica b, visina bočne strane h i visina piramide H. Izračunajte površinu (oplošje) P i zapreminu (volumen) V piramide ako je:

a) $a=8$, $b=5$ b) $a=6$, $h=8$

c) $a=6\sqrt{3}$, $H=4$ d) $b=5$, $h=4$.

172. Osnovna ivica (brid) pravilne trostrane piramide iznosi a, a bočna ivica $2a$. Kolika je površina i zapremina (volumen) piramide?

173. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) pravilne trostrane piramide osnovne ivice (brida) a ako su bočne ivice međusobno normalne.

174. Bočna ivica (brid) pravilne trostrane piramide je šest puta duža od radijusa kružnice upisane u bazu. Kolika je zapremina (volumen) piramide ako je njezina osnovna ivica a?

175. Površina P pravilne trostrane piramide iznosi $18\sqrt{3}$, a visina piramide je dvaput duža od osnovne ivice (brida) a. Kolika je osnovna ivica a i zapremina V piramide?

176. U kvadru čije su ivice (bridovi) $a=3\sqrt{14}$, $b=3\sqrt{11}$, $c=\sqrt{70}$ povučene su dijagonale iz jednog tjemena (vrha) u stranama koje se u tom vrhu sustiču, a krajnje tačke dijagonala su međusobno spojene. Kolika je površina i zapremina (volumen) nastale trostrane piramide?

177. Neka je a osnovna, a b bočna ivica (brid), h visina bočne strane a H visina pravilne četvorostrane piramide. Površina piramide je P a zapremina (volumen) V. Izračunajte nepoznate od tih veličina ako je zadano:

a) $a=10$, $b=13$ b) $a=6$, $P=96$ c) $a=12$, $V=384$

d) $b=17$, $h=15$ e) $b=\sqrt{34}$, $H=4$ f) $h=5$, $P=144$

g) $H=4$, $P=96$ h) $H=8$, $V=384$ i) $P=V$, $a:h:H=6:5:4$.

178. Zapremina (volumen) jednakoivične četvorostrane piramide je $V=36\sqrt{2}$ a visina $H=3\sqrt{2}$. Kolika je površina piramide?

179. Bočna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide odnosi se prema osnovnoj ivici kao 5:6. Kolika je zapremina (volumen) piramide ako je njezina površina $P=336$?

180. Površina pravilne četvorostrane piramide je $P=384$, a osnovna ivica (brid) se odnosi prema visini piramide kao 3:2. Kolika je osnovna ivica a, visina h bočne strane i visina H piramide?

181. Zadana je visina H pravilne četvorostrane piramide. Bočna strana jednaka je bazi piramide. Izrazite površinu i zapreminu (volumen) piramide kao funkciju od H.

161. Konstruišite ravni presjek četvorostrane piramide ako ravan (ravnina) prolazi kroz tri tačke A, B i C na bočnim ivicama (bridovima) piramide.

162. Konstruišite ravni presjek petostrane piramide ako ravan (ravnina) prolazi kroz tri tačke A, B i C na trima, redom odabranim, bočnim ivicama (bridovima) piramide.

163. Proizvoljnu četvorostranu piramidu treba presjeći tako da nastali ravni presjek bude paralelogram.

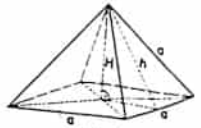
164. Izračunajte površinu presjeka pravilne trostrane piramide ako presječnu ravan (ravninu) određuju visine bočnih strana. Osnovna ivica je a, a visina piramide je H.

165. Odredite površinu ravnog presjeka pravilne četvorostrane piramide osnovne ivice (brida) a i visine H ako je presječna ravan (ravnina) određena bočnim visinama koje pripadaju dvjema susjednim osnovnim ivicama.

166. Osnovna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide je a, a bočna ivica zatvara sa bazom ugao (kut) od 60°. Kroz tjeme (vrh) na bazi je položena ravan (ravnina) normalno na suprotnu ivicu. Izračunajte površinu nastalog ravnog presjeka piramide.

167. Neka je a ivica (brid), h visina bočne strane (pobočke), a H visina jednakoivične četvorostrane piramide (sl. 8). Izračunajte svaku nepoznatu od te tri veličine ako je zadano:

a) a b) h c) H.

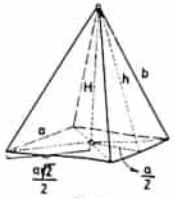


Sl. 8

168. Neka je a osnovna ivica (brid), b bočna ivica, h visina bočne strane i H visina pravilne četvorostrane piramide (sl. 9). Odredite nepoznate od te četiri veličine ako je zadano:

a) a, b b) a, h c) a, H

d) b, h e) b, H f) h, H.

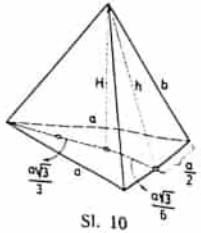


Sl. 9

169. Zadana je visina H i osnovna ivica (brid) a pravilne trostrane piramide. Izračunajte njezinu bočnu ivicu b i visinu h bočne strane (sl. 10).

170. a) Iz poznate ivice (brida) a pravilnog tetraedra izračunajte njegovu visinu H.

b) Iz poznate visine H pravilnog tetraedra izračunajte njegovu ivicu a.



Sl. 10

Površina (oplošje) i zapremina (volumen) piramide

171. Osnovna ivica (brid) pravilne trostrane piramide iznosi a, bočna ivica b, visina bočne strane h i visina piramide H. Izračunajte površinu (oplošje) P i zapreminu (volumen) V piramide ako je:

a) $a=8$, $b=5$ b) $a=6$, $h=8$

c) $a=6\sqrt{3}$, $H=4$ d) $b=5$, $h=4$.

172. Osnovna ivica (brid) pravilne trostrane piramide iznosi a, a bočna ivica $2a$. Kolika je površina i zapremina (volumen) piramide?

173. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) pravilne trostrane piramide osnovne ivice (brida) a ako su bočne ivice međusobno normalne.

174. Bočna ivica (brid) pravilne trostrane piramide je šest puta duža od radijusa kružnice upisane u bazu. Kolika je zapremina (volumen) piramide ako je njezina osnovna ivica a?

175. Površina P pravilne trostrane piramide iznosi $18\sqrt{3}$, a visina piramide je dvaput duža od osnovne ivice (brida) a. Kolika je osnovna ivica a i zapremina V piramide?

176. U kvadru čije su ivice (bridovi) $a=3\sqrt{14}$, $b=3\sqrt{11}$, $c=\sqrt{70}$ povučene su dijagonale iz jednog tjemena (vrha) u stranama koje se u tom vrhu sustiču, a krajnje tačke dijagonala su međusobno spojene. Kolika je površina i zapremina (volumen) nastale trostrane piramide?

177. Neka je a osnovna, a b bočna ivica (brid), h visina bočne strane a H visina pravilne četvorostrane piramide. Površina piramide je P a zapremina (volumen) V. Izračunajte nepoznate od tih veličina ako je zadano:

a) $a=10$, $b=13$ b) $a=6$, $P=96$ c) $a=12$, $V=384$

d) $b=17$, $h=15$ e) $b=\sqrt{34}$, $H=4$ f) $h=5$, $P=144$

g) $H=4$, $P=96$ h) $H=8$, $V=384$ i) $P=V$, $a:h:H=6:5:4$.

178. Zapremina (volumen) jednakoivične četvorostrane piramide je $V=36\sqrt{2}$ a visina $H=3\sqrt{2}$. Kolika je površina piramide?

179. Bočna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide odnosi se prema osnovnoj ivici kao 5:6. Kolika je zapremina (volumen) piramide ako je njezina površina $P=336$?

180. Površina pravilne četvorostrane piramide je $P=384$, a osnovna ivica (brid) se odnosi prema visini piramide kao 3:2. Kolika je osnovna ivica a, visina h bočne strane i visina H piramide?

181. Zadana je visina H pravilne četvorostrane piramide. Bočna strana jednaka je bazi piramide. Izrazite površinu i zapreminu (volumen) piramide kao funkciju od H.

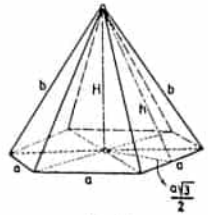
182. Baza piramide je kvadrat. Jedna bočna ivica (brid) je normalna na bazu. Kako se mora odnositi visina piramide prema njezinoj osnovnoj ivici u slučaju da bočna površina bude triput veća od baze?

183. Baza piramide je pravougaonik (pravokutnik) čije su stranice $a = 10$, $b = 18$, a površina dijagonalnog presjeka $P = 12\sqrt{106}$. Kolika je površina i zapremina (volumen) piramide?

184. Neka je a osnovna ivica (brid) a b bočna; h je visina bočne strane a H visina pravilne šestostrane piramide (sl. 11). P je njezina površina a V zapremina (volumen). Izračunajte nepoznate od tih veličina ako je zadano;

a) $a = 10$, $b = 13$ b) $a = 6$, $h = 10$

c) $a = 4$, $V = 48\sqrt{3}$ d) $a = 2$, $P = 18\sqrt{3}$.



Sl. 11

185. Visina pravilne šestostrane piramide iznosi $\frac{3}{2}$ osnovne ivice (brida), a površina piramide je $18\sqrt{3}$. Kolika je njezina zapremina (volumen)?

186. Zadane su tri paralelne nekomplanarne prave p_1, p_2 i p_3. Na pravoj p_1 je zadana stalna duž (dužina) AB, na pravoj p_2 tačka C i na pravoj p_3 tačka D. Dokažite da tetraedar $ABCD$ ima stalnu zapreminu (volumen) kad se tačke C i D kreću svaka po svojoj pravoj (pravcu).

6. Zarubljena (krnja) piramida

Dio piramide koji se nalazi između baze i presjeka koji je s njom paralelan, zove se zarubljena (krnja) piramida. Preostali dio se zove dopunska piramida (dopunjak) zarubljenje piramide.

Paralelne strane se zovu baze (osnove) zarubljene piramide. Ostale strane čine bočnu površinu (pobočje) zarubljene (krnje) piramide. Pojedine bočne strane su trapezi. Ako je baza piramide poligon sa n stranica, piramida se zove n-tostrana. Udaljenost između baza zove se visina zarubljene piramide.

Zarubljena piramida je pravilna ako je dio pravilne piramide.

Presjek zarubljene piramide, dobiven pomoću ravni (ravnine) koja prolazi dijagonalom baze i bočnim ivicama (bridovima), zove se dijagonalni presjek zarubljene piramide.

Ako su B_1 i B_2 površine baza zarubljene piramide, H njezina visina, a x visina dopunske piramide, onda je $B_1 : B_2 = (H + x)^2 : x^2$.

Površina zarubljene piramide se dobija po obrascu $P = B_1 + B_2 + M$, gdje su B_1 i B_2 površine baza a M njezina bočna površina. Zapremina (volumen) je

$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2).$$

Presjeci zarubljene piramide

187. Zarubljena piramida čije su baze $B_1 = 64$ i $B_2 = 4$ a visina $H = 9$ presijeca ravan (ravnina) paralelno s bazama u udaljenosti 3 od veće baze. Kolika je površina B dobivenog presjeka?

188. Visina zarubljene (krnje) piramide čije su baze $B_1 = 64$ i $B_2 = 4$ podijeljena je dvjema ravnima (ravninama) koje su paralelne s bazom na tri jednaka dijela. Kolike su površine presjeka?

189. Zarubljena (krnja) piramida čije su baze $B_1 = 25$ i $B_2 = 9$ a visina $H = 6$ treba da se presiječe paralelno s bazama tako da nastali presjek B bude jednak aritmetičkoj sredini obiju baza piramide. U kojoj udaljenosti y od manje baze treba načiniti presjek?

190. Zarubljenu (krnju) piramidu čije su baze $B_1 = 9$ i $B_2 = 4$ a visina $H = 6$ treba presjeći paralelno s bazama tako da nastali presjek B bude jednak geometrijskoj sredini obiju baza piramide. U kojoj udaljenosti y od manje baze treba načiniti presjek piramide?

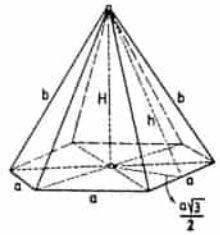
182. Baza piramide je kvadrat. Jedna bočna ivica (brid) je normalna na bazu. Kako se mora odnositi visina piramide prema njezinoj osnovnoj ivici u slučaju da bočna površina bude triput veća od baze?

183. Baza piramide je pravougaonik (pravokutnik) čije su stranice $a = 10$, $b = 18$, a površina dijagonalnog presjeka $P = 12\sqrt{106}$. Kolika je površina i zapremina (volumen) piramide?

184. Neka je a osnovna ivica (brid) a b bočna; h je visina bočne strane a H visina pravilne šestostrane piramide (sl. 11). P je njezina površina a V zapremina (volumen). Izračunajte nepoznate od tih veličina ako je zadano;

a) $a = 10$, $b = 13$ b) $a = 6$, $h = 10$

c) $a = 4$, $V = 48\sqrt{3}$ d) $a = 2$, $P = 18\sqrt{3}$.



Sl. 11

185. Visina pravilne šestostrane piramide iznosi $\frac{3}{2}$ osnovne ivice (brida), a površina piramide je $18\sqrt{3}$. Kolika je njezina zapremina (volumen)?

186. Zadane su tri paralelne nekomplanarne prave p_1, p_2 i p_3. Na pravoj p_1 je zadana stalna duž (dužina) AB, na pravoj p_2 tačka C i na pravoj p_3 tačka D. Dokažite da tetraedar $ABCD$ ima stalnu zapreminu (volumen) kad se tačke C i D kreću svaka po svojoj pravoj (pravcu).

6. Zarubljena (krnja) piramida

Dio piramide koji se nalazi između baze i presjeka koji je s njom paralelan, zove se zarubljena (krnja) piramida. Preostali dio se zove dopunska piramida (dopunjak) zarubljenje piramide.

Paralelne strane se zovu baze (osnove) zarubljene piramide. Ostale strane čine bočnu površinu (pobočje) zarubljene (krnje) piramide. Pojedine bočne strane su trapezi. Ako je baza piramide poligon sa n stranica, piramida se zove n-tostrana. Udaljenost između baza zove se visina zarubljene piramide.

Zarubljena piramida je pravilna ako je dio pravilne piramide.

Presjek zarubljene piramide, dobiven pomoću ravni (ravnine) koja prolazi dijagonalom baze i bočnim ivicama (bridovima), zove se dijagonalni presjek zarubljene piramide.

Ako su B_1 i B_2 površine baza zarubljene piramide, H njezina visina, a x visina dopunske piramide, onda je $B_1 : B_2 = (H + x)^2 : x^2$.

Površina zarubljene piramide se dobija po obrascu $P = B_1 + B_2 + M$, gdje su B_1 i B_2 površine baza a M njezina bočna površina. Zapremina (volumen) je

$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2).$$

Presjeci zarubljene piramide

187. Zarubljena piramida čije su baze $B_1 = 64$ i $B_2 = 4$ a visina $H = 9$ presijeca ravan (ravnina) paralelno s bazama u udaljenosti 3 od veće baze. Kolika je površina B dobivenog presjeka?

188. Visina zarubljene (krnje) piramide čije su baze $B_1 = 64$ i $B_2 = 4$ podijeljena je dvjema ravnima (ravninama) koje su paralelne s bazom na tri jednaka dijela. Kolike su površine presjeka?

189. Zarubljena (krnja) piramida čije su baze $B_1 = 25$ i $B_2 = 9$ a visina $H = 6$ treba da se presiječe paralelno s bazama tako da nastali presjek B bude jednak aritmetičkoj sredini obiju baza piramide. U kojoj udaljenosti y od manje baze treba načiniti presjek?

190. Zarubljenu (krnju) piramidu čije su baze $B_1 = 9$ i $B_2 = 4$ a visina $H = 6$ treba presjeći paralelno s bazama tako da nastali presjek B bude jednak geometrijskoj sredini obiju baza piramide. U kojoj udaljenosti y od manje baze treba načiniti presjek piramide?

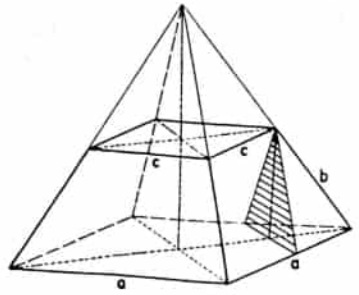
191. Baze zarubljene (krnje) piramide su B_1 i B_2 a visina H. Dokažite da je površina presjeka B piramide koji je paralelan s bazom a raspolavlja visinu jednaka aritmetičkoj sredini između aritmetičke i geometrijske sredine obiju baza.

192. Zarubljena (krnja) piramida čije su baze B_1 i B_2 a visina H presječena je paralelno s bazama u udaljenosti $\frac{H}{n}$ od veće baze B_1.

Kolika je površina B nastalog presjeka?

193. Zarubljena (krnja) piramida čije su baze B_1 i B_2 presječena je paralelno s bazama tako da je visina piramide podijeljena tim presjekom u razmjeri (omjeru) $m:n$ polazeći od veće baze B_1. Kolika je površina B nastalog presjeka?

194. Pravilnu četvorostranu zarubljenu (krnju) piramidu, čije su osnovne ivice (bridovi) $a=12$ i $c=8$ a bočna ivica $b=20$, presijeca ravan (ravnina) koja prolazi kroz krajnju tačku dijagonale manje baze normalno na tu dijagonalu (sl. 12). Kolika je površina dobivenog presjeka piramide?



Sl. 12

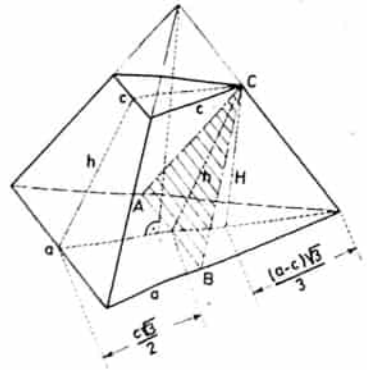
195. Pravilnu četvorostranu zarubljenu (krnju) piramidu presijeca ravan koja prolazi donjom i njoj suprotnom gornjom ivicom (bridom). Kolika je površina nastalog presjeka ako su ivice $a=5$ i $c=3$ a visina piramide $H=3$?

196. Pravilnu trostranu zarubljenu (krnju) piramidu, čije su osnovne ivice (bridovi) $a=9$ i $c=6$ a visina $H=12$, presijeca ravan (ravnina) (sl. 13) koja prolazi kroz tjeme (vrh) manje baze paralelno sa suprotnom bočnom stranom. Izračunajte površinu P nastalog presjeka!

197. Osnovne ivice (bridovi) pravilne četvorostrane zarubljene (krnje) piramide su $a=6$ i $c=2$. Izračunajte visinu piramide ako nagibni ugao (prikloni kut):

a) bočne strane **b)** bočne ivice

prema bazi iznosi 60°.



Sl. 13

198. Osnovne ivice (bridovi) pravilne četvorostrane zarubljene (krnje) piramide su $a=5$ i $c=2$. Kolika je visina piramide ako nagibni ugao (prikloni kut):

a) bočne strane **b)** bočne ivice

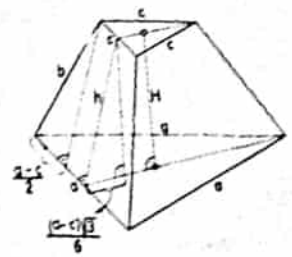
prema bazi iznosi 30°?

199. Osnovne ivice (bridovi) pravilne trostrane zarubljene (krnje) piramide su $a=9$ i $c=3$. Izračunajte visinu piramide ako nagibni ugao (prikloni kut):

a) bočne strane

b) bočne ivice

prema bazi iznosi 60° (sl. 14).



Sl. 14

Površina i zapremina zarubljene piramide (oplošje i volumen krnje piramide)

200. Osnovne ivice (bridovi) pravilne četvorostrane zarubljene (krnje) piramide su a i c (sl. 15), bočna ivica b, visina bočne strane h i visina piramide H. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) piramide ako je:

a) $a=8,\ c=2,\ b=5$

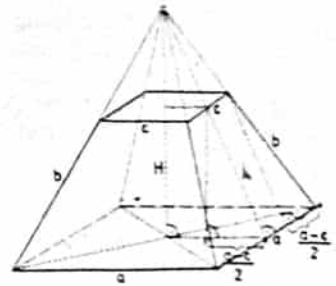
b) $a=9,\ c=3,\ h=5$

c) $a=13,\ b=10,\ h=8$

d) $b=13,\ c=2,\ h=12$

e) $a=10,\ c=4,\ H=4$

f) $a=8,\ c=2,\ h=5.$



Sl. 15

201. Osnovne ivice (bridovi) pravilne trostrane zarubljene (krnje) piramide su a i c (sl. 14), bočna ivica b, visina bočne strane h i visina piramide H. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) piramide ako je:

a) $a=12,\ c=2,\ b=13$ **b)** $a=8,\ c=2,\ h=4$

c) $a=10,\ b=5,\ h=4$ **d)** $b=10,\ c=3,\ h=8$

e) $a=10\sqrt{3},\ c=4\sqrt{3},\ H=4$ **f)** $a=12\sqrt{3},\ c=2\sqrt{3},\ h=13.$

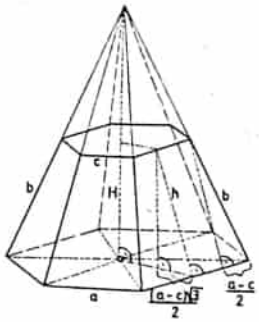
202. Osnovne ivice (bridovi) pravilne šestostrane zarubljene (krnje) piramide su a i c (sl. 16), bočna ivica b, visina bočne strane h i visina piramide H. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) piramide ako je:

a) $a=12,\ c=2,\ b=13$

b) $a=5\sqrt{3},\ c=3\sqrt{3},\ h=4$

c) $a=12,\ b=13,\ h=12$

d) $a=4\sqrt{3},\ c=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ H=12.$



Sl. 16

203. Pokažite da se obrasci za zapreminu (volumen) prizme i piramide dobivaju kao specijalni slučajevi obrasca za zapreminu zarubljene (krnje) piramide.

204. Pravilna četvorostrana piramida osnovne ivice (brida) 20 cm i visine 24 cm presječena je paralelno s bazom po sredini visine. Izračunajte površine i zapremine nastalih dijelova.

205. Pravilnu četvorostranu piramidu presijeca ravan (ravnina) paralelno s bazom. Izračunajte površinu nastale zarubljene (krnje) piramide ako je površina presjeka 100 cm², visina cijele piramide 36 cm a visina zarubljene piramide 24 cm.

206. U pravilnu četvorostranu piramidu treba upisati kocku tako da joj četiri tjemena (vrha) leže u bazi, a ostala četiri tjemena (vrha) na bočnim ivicama piramide. Kako se odnosi zapremina (volumen) V_1 kocke prema zapremini V_2 zarubljene (krnje) piramide u kojoj leži ako je osnovna ivica (brid) piramide $a=20$ a visina $H=30$?

207. U pravilnu trostranu piramidu osnovne ivice $a=20$ i visine $H=30$ postavite pravilnu jednakoivičnu prizmu tako da joj tri tjemena (vrha) leže u bazi piramide a preostala tri na njenim bočnim ivicama. Kako se odnosi zapremina (volumen) V_1 prizme prema zapremini V_2 piramide?

208. U zarubljenoj (krnjoj) piramidi, čije se baze odnose kao 16:1, nalazi se prizma koja ima s piramidom zajedničku visinu i manju bazu. Kako se odnose zapremine (volumeni) obaju tijela?

209. Pravilnu trostranu zarubljenu (krnju) piramidu presijeca ravan (ravnina) koja prolazi kroz osnovnu ivicu (brid) manje baze paralelno s nasuprotnom bočnom ivicom. Kolike su zapremine (volumeni) dobijenih dijelova ako su osnovne ivice $a=5$, $c=3$ a visina piramide $H=6$?

210. Površine baza pravilne četvorostrane zarubljene (krnje) piramide odnose se kao 9:1, zapremina (volumen) joj je 156, a visina 4. Kolika je površina piramide?

211. Veća baza zarubljene (krnje) piramide je $B_1=36$, njezina zapremina (volumen) $V=104$, a baze se odnose kao 9:1. Nađite zapreminu dopunske piramide!

212. Baze zarubljene piramide iznose $B_1=16$ i $B_2=1$, a zapremina (volumen) piramide je $V=21$. Izračunajte zapreminu dopunske piramide!

213. Zapremina (volumen) zarubljene (krnje) piramide je $V=3904$, visina $H=48$, a suma njezinih baza $B_1+B_2=164$. Kolike su baze piramide?

214. Veća baza zarubljene (krnje) piramide je $B_1=25$, visina $H=24$, a dvije homologne ivice (brida) se odnose kao 5:4. Kolika je zapremina (volumen) dopunske piramide?

215. Zadane su površine B_1 i B_2 baza i zapremina (volumen) V zarubljene (krnje) piramide. Izrazite zapreminu V_1 čitave piramide (od koje je zarubljena piramida sastavni dio) kao funkciju veličina B_1, B_2 i V!

216. Površina dijagonalnog presjeka pravilne četvorostrane zarubljene (krnje) piramide iznosi 132, bočna ivica (brid) je 13 a visina piramide 12. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

217. Pravougli rogalj (pravokutni prostorni ugao) je presječen dvjema paralelnim ravnima (ravninama) tako da su presjeci jednakostranični trouglovi (trokuti) sa stranicama $a=10$ i $c=8$. Kolika je bočna površina (pobočje) dobijene zarubljene (krnje) piramide?

218. Ravni (ravnine) koje su paralelne s bazom presijecaju piramidu tako da je visina podijeljena na tri jednaka dijela. U kom odnosu su zapremine (volumeni) nastalih triju piramida?

219. Zapremina (volumen) pravilne šestostrane zarubljene (krnje) piramide iznosi $228\sqrt{3}$, visina je 6 a ivica (brid) gornje baze 4. Kolika je donja baza?

220. Kolike su osnovne ivice (bridovi) pravilne šestostrane zarubljene (krnje) piramide ako je njezina visina $H=6$, suma baza iznosi $30\sqrt{3}$ a zapremina (volumen) $V=84\sqrt{3}$?

7. Valjak (cilindar)

Ako prava (pravac) p vrši translaciju tako da stalno siječe neku čvrstu liniju C ona proizvodi površ koja se zove cilindrična površ. Pokretna prava se zove izvodnica (generatrisa) a linija C je vodilja (direktrisa). Ako je linija C otvorena, onda je i cilindrična površ otvorena; ako je linija C zatvorena, zatvorena je i cilindrična površ. Figura koju dobijamo kad zatvorenu cilindričnu površ presiječemo dvjema međusobno paralelnim ravnima (ravninama), koje nisu paralelne izvodnicama, zove se valjak ili cilindar. Dio cilindrične površi između paralelnih ravni se zove bočna površ (omotač, plašt) cilindra, a ravni presjeci su njegove baze (osnove). Cilindar je prav (uspravan) ako je izvodnica normalna na ravan baze, a kos ako je kosa prema toj ravni.

Cilindar čija je baza krug zove se kružni cilindar ili kružni valjak*).

Dijelovi izvodnica na omotaču valjka se zovu izvodnice ili stranice valjka.

Udaljenost između baza valjka je njegova visina.

Prava koja prolazi kroz sredine baza pravog (uspravnog) kružnog cilindra zove se njegova osa (os).

Ako je visina pravog kružnog cilindra jednaka dijametru njegove baze, cilindar se zove jednakostrani.

Presjek cilindra pomoću ravni (ravnine) koja prolazi kroz njegovu osu, zove se osni (osovinski) presjek cilindra.

Presjek kosog valjka pomoću ravni koja prolazi kroz njegovu osu normalno na ravan baze zove se karakterističan presjek kosog cilindra.

Površina pravog kružnog cilindra je $P = 2B + M$ gdje je B površina baze a M površina omotača (plašta). Ako je r radijus baze, a H njegova visina, onda je $P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 2r\pi(r + H)$. Zapremina (volumen) kružnog cilindra je $V = r^2\pi H$ gdje je r radijus baze a H njegova visina. Kod jednakostranog cilindra je $P = 6r^2\pi$ a $V = 2r^3\pi$.

Presjeci valjka

221. Šta je geometrijsko mjesto tačaka u prostoru koje su jednako udaljene od zadane prave?

222. Presjek cilindra sa ravni (ravninom) koja je paralelna s njegovom osom je paralelogram. — Dokažite!

223. Osni (osovinski) presjek pravog (uspravnog) cilindra je veći od svakog drugog presjeka koji je paralelan sa osom. — Dokažite!

224. Od svih presjeka kosog cilindra koji su paralelni izvodnicama kosog cilindra najmanji je njegov karakterističan presjek, a najveći onaj koji je na ovome normalan. — Dokažite!

*) U zadacima o cilindru uvijek se misli na kružni cilindar ukoliko nije drugačije istaknuto.

225. Neki presjek pravog (uspravnog) cilindra, koji je paralelan sa osom, ima dijagonalu $d = 17$, površinu $P = 120$ i centralnu udaljenost $c = 3$. Koliki je radijus r baze i visina H valjka?

226. U pravom (uspravnom) cilindru je neki presjek, koji je paralelan sa osom, jednak trećini osnog presjeka. U kojoj udaljenosti od ose je učinjen taj presjek?

227. Neki presjek koji je paralelan s osom pravog (uspravnog) cilindra iznosi $\frac{4}{5}$ njegovog osnog presjeka. U kojoj udaljenosti od ose leži taj presjek?

228. Karakterističan presjek kosog cilindra je romb čija je površina $18\sqrt{3}$ kvadratnih jedinica, a ugao iznosi 60°. Koliki je radijus baze i visina cilindra?

229. U nekom kosom cilindru je karakterističan presjek jednak polovini osnog presjeka koji je na ovome normalan. Koliki je nagibni ugao (prikloni kut) α osi prema bazi?

230. Koliki najkraći treba da bude dijametar baze valjka da se u njemu može smjestiti kocka tako da im se baze poklapaju i koliki najkraći treba da bude taj dijametar pa da se u valjak može smjestiti kocka u bilo kojem položaju?

231. Kako se odnose površine najmanjeg i najvećeg osnog presjeka kosog cilindra ako je nagibni ugao (prikloni kut) ose (osi) prema bazi:

a) 30° b) 60° c) 45°?

232. Kosi cilindar, kome je radijus baze $r = 5$ i visina $H = 10$ a osa nagnuta prema bazi za ugao (kut) $\alpha = 30°$, presijeca ravan (ravninu) paralelno s osom u udaljenosti 2 od nje s tim da je normalna na karakteristični presjek cilindra. Kolika je površina dobivenog presjeka?

233. Dva prava (uspravna) cilindra jednake visine $H = 25$ cm prodiru jedan u drugi tako da im je udaljenost između centara baza $c = 15$ cm, a ose paralelne. Kolika je ravna površina koja je zajednička obim cilindrima ako su radijusi baza $R = 44$ cm i $r = 37$ cm?

Površina i zapremina (volumen) cilindra

234. Radijus baze pravog (uspravnog) cilindra je r, njegova visina H, omotač (plašt) M, površina baze B, površina P i zapremina V. Od pomenutih veličina izračunajte nepoznate ako je zadano:

a) $r = 2$, $M = 20\pi$ b) $r = 3$, $P = 48\pi$ c) $r = 2$, $V = 12\pi$

d) $M = 12\pi$, $B = 4\pi$ e) $M = 24\pi$, $V = 36\pi$ f) $B = 16\pi$, $P = 40\pi$

g) $B = 9\pi$, $V = 18\pi$.

235. Površina jednakostranog cilindra je $P = 24\pi$. Koliki su radijus r baze i zapremina (volumen) V toga cilindra?

236. Za koliko (x) treba uvećati radijus (r) baze jednakostranog cilindra (ne mijenjajući mu visinu) da površina postane osam puta veća?

237. Za koliko (x) treba uvećati radijus r baze zadanog jednakostranog cilindra da površina dobivenog jednakostranog cilindra bude devet puta veća od površine zadanog cilindra?

238. a) Iz poznate površine P jednakostranog cilindra izračunajte njegovu zapreminu (volumen).

b) Iz poznate zapremine izračunajte površinu jednakostranog cilindra.

239. Visine dvaju cilindara jednakih baza odnose se kao 1 : 3. Zapremina (volumen) prvog cilindra je 36π. Kolika je zapremina drugog?

240. Izračunajte površinu pravog (uspravnog) cilindra kome radijus baze iznosi $\frac{3}{5}$ visine i zapremina (volumen) je $V = 360\pi$.

241. Omotač (plašt) pravog (uspravnog) cilindra odnosi se prema površini cilindara kao 3 : 5. Kolika je zapremina (volumen) cilindra ako je radijus baze za 9 manji od visine?

242. Prav (uspravan) cilindar ima površinu 224π cm², a dijametar baze se odnosi prema visini kao 8 : 3. Izračunajte zapreminu cilindra.

243. Zapremine (volumeni) triju cilindara jednake visine $H = 1$ odnose se kao 1 : 4 : 9, a suma zapremina je 56π. Koliki su radijusi baza?

244. Površina pravog (uspravnog) cilindra iznosi 32π kvadratnih jedinica a $r : H = 1 : 3$. Kolika je zapremina (volumen) cilindra?

245. Iz površine P pravog (uspravnog) cilindra i njegovog omotača (plašta) M izračunajte radijus r baze i visinu H.

246. Radijus baze jednog cilindra jednak je visini drugog, a radijus baze drugog jednak je visini prvog. Za koliko se razlikuju njihove površine a za koliko zapremine ako je suma njihovih površina 200π a suma zapremina 240π?

247. U kocku je upisan i oko nje opisan cilindar. Kako se odnose zapremine cilindara?

248. U pravilnu trostranu jednakoivičnu prizmu je upisan i oko nje opisan valjak. Kako se odnose zapremine valjaka?

249. U trostranu prizmu čije su osnovne ivice (bridovi) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ je upisan i oko nje opisan cilindar. Kako se odnose njihove zapremine?

250. Baza prizme je pravougli trougao (pravokutni trokut) čije se katete odnose kao 3 : 4, a površina mu je $P = 96$. Kako se odnose zapremine upisanog i opisanog cilindra?

251. Kakva veza mora postojati između radijusa r baze pravog (uspravnog) cilindra da bude njegova površina i zapremina izražena istim brojem?

252. Cilindar je presječen sa ravni (ravninom) koja je paralelna s osom cilindra i udaljena od nje $\frac{r}{2}$. Kako se odnose zapremine (volumeni) oba tijela?

253. Kroz osu (os) pravog (uspravnog) cilindra ($r = 24$, $H = 10$) položene su dvije poluravni (poluravnine) pod uglom (kutom) od 30°. Kolika je površina i zapremina onog dijela cilindra koji se nalazi između tih poluravni?

254. a) Kako se odnose zapremine (volumeni) pravih (uspravnih) cilindara kojima su jednake površine omotača (plašteva)?

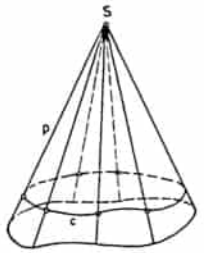
b) Kako se odnose površine omotača pravih (uspravnih) cilindara kojima su jednake zapremine?

255. Karakterističan presjek kosog cilindra je romb kome je zadana kraća dijagonala d. kolika je njegova zapremina ako je poznata visina H?

256. Karakterističan presjek kosog cilindra je romb čija je površina P a kraća dijagonala d. Kolika je zapremina (volumen) cilindra?

8. Konus (kupa, stožac)

Ako prava (pravac) p koja prolazi kroz čvrstu tačku S prostora klizi po nekoj krivoj liniji C koja sa tačkom S ne leži u jednoj ravni (ravnini) nastaje konusna površ (stožasta ploha) (sl. 17). Prava p je izvodnica (generatrisa), linija C je vodilja (direktrisa), a tačka S je vrh konusne površine. Prema tome da li je kriva C zatvorena ili otvorena, nastaje zatvorena ili otvorena konusna površina.



Sl. 17

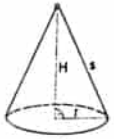
Ako zatvorenu konusnu površinu presijeca ravan (ravnina), koja siječe sve izvodnice konusa, nastaje konus.

Dio konusne površine koji je ograničen tom ravni zove se omotač (plašt) konusa a dio ravni, koji je isječen konusnom površinom, baza ili osnova konusa. Normala spuštena iz vrha na bazu konusa je njegova visina.

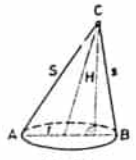
Ako je baza konusa krug, konus se zove kružni*). Prava (pravac) koja spaja vrh kružnog konusa sa centrom njegove baze, zove se osovina (osa, os) konusa. Ako je osa konusa normalna na bazu, on se zove prav (uspravan) (sl. 18a); inače je kos (sl. 18b).

Svaki presjek konusa sa ravni koja prolazi kroz njegovu osu, zove se osovinski (osni) presjek konusa. Osovinski presjek kosog konusa koji je dobiven sa ravni koja je normalna na bazu konusa zove se karakterističan presjek kosog konusa (ABC na slici 18b).

Prav (uspravan) konus čiji je radijus baze r, a izvodnica (stranica) s ima površinu $P = r\pi(r+s)$. Zapremina (volumen) svakog konusa radijusa baze r i visine H je $V = \frac{r^2\pi H}{3}$.



Sl. 18a



Sl. 18b

Prav konus kome je osovinski presjek jednakostraničan trougao (trokut) zove se jednakostrani konus. Ako je r njegov radijus baze, onda mu je površina $P = 3r^2\pi$ a zapremina (volumen) $V = \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Presjeci konusa

257. Šta je geometrijsko mjesto pravih (pravaca) koje zatvaraju sa zadanom pravom u njezinoj zadanoj tački, zadani ugao (kut)?

258. Ako se polukrug (r) savije tako da postane omotač (plašt) konusa, dobija se jednakostrani konus. — Dokažite!

*) U zadacima o konusu uvijek se misli na kružni konus ako nije drugačije istaknuto.

259. Kod nekog pravog (uspravnog) konusa odnosi se radijus baze r prema visini H kao 5:12. Koliki je ugao (kut) kružnog isječka koji nastaje kad se omotač konusa rasprostre u ravan (ravninu)?

260. Ravan (ravnina) presijeca prav (uspravan) konus (R, H) paralelno s bazom u udaljenosti $\frac{H}{3}$:

a) od vrha b) od baze.

Kako se odnosi površina presjeka prema površini baze?

261. Ravan (ravnina) presijeca prav (uspravan) konus $(r = 15,\ H = 12)$ paralelno s bazom tako da je površina presjeka 100π. U kojoj udaljenosti od baze je načinjen presjek?

262. Oko pravog konusa (uspravnog stošca) je opisana trostrana piramida čija je baza $B = 336$, a bočne strane (pobočke) iznose $P_1 = 130$, $P_2 = 140$ i $P_3 = 150$. Kolika je visina i radijus baze konusa?

263. U prav (uspravan) konus radijusa baze $r = 3$ i visine $H = 6\sqrt{2}$ upisana je kocka tako da joj četiri tjemena (vrha) leže u bazi, a četiri preostala tjemena (vrha) na omotaču (plaštu) konusa. Kolika je ivica (brid) kocke?

264. U prav (uspravan) konus, kome je radijus baze $r = 2$ i visina $H = 2\sqrt{3}$, upisana je trostrana jednakoivična prizma. Kolika je ivica (brid) prizme?

265. U prav (uspravan) konus radijusa baze $r = 20$ i visine $H = 30$ upisana je jednakoivična šestostrana prizma. Kolika joj je ivica (brid)?

266. Svaka ravan (ravnina) koja dodiruje konus po nekoj njegovoj izvodnici (stranici) zove se dodirna (tangencijalna) ravan. — Koliko dodirnih ravni konusa možemo položiti kroz neku pravu (pravac) p koja prolazi kroz vrh konusa a ne prodire kroz njegovu bazu?

267. Od svih osnih presjeka kosog konusa najmanji je karakterističan presjek a najveći onaj, koji je na njega normalan. — Dokažite!

268. Geometrijsko mjesto nožišta visina svih osnih presjeka kosog konusa je kružnica. — Dokažite!

269. Nagibni ugao (prikloni kut) ose kosog konusa prema bazi iznosi

a) 30° b) 45° c) 60°.

Kako se odnosi površina karakterističnog presjeka prema osnom presjeku koji je na njega normalan?

270. Kolike su površine najvećeg i najmanjeg osnog presjeka kosog konusa kod koga je najduža izvodnica $S = 15$, najkraća $s = 13$ a radijus baze $r = 7$?

Površina i zapremina (volumen) konusa

271. Prav (uspravan) konus ima radijus baze r, visinu H, izvodnicu s, omotač (plašt) M, površinu baze B, površinu P i zapreminu (volumen) V. Izračunajte površinu i zapreminu konusa ako je zadano:

a) $r=5,\ H=12$ b) $r=6,\ s=10$ c) $H=4k,\ s=5k$

d) $r=6,\ M=60\pi$ e) $s=26,\ M=260\pi$ f) $s=5,\ B=9\pi$

g) $r=3,\ P=24\pi$ h) $s=10,\ P=96\pi$ i) $r=4,\ V=16\pi$

j) $H=4,\ V=12\pi$.

272. Kolika je površina a kolika zapremina (volumen) jednakostranog konusa visine H?

273. Izračunajte radijus r baze i visinu H pravog (uspravnog) konusa čija je zapremina (volumen) $V=9\pi\sqrt{3}$ a površina omotača (plašta) je dvaput veća od površine baze.

274. Osni presjek pravog (uspravnog) konusa je pravougli trougao (pravokutni trokut). Koliki je omotač (plašt) konusa, a kolika njegova zapremina (volumen) ako je obim (opseg) beze konusa $O=6\pi$?

275. Osni presjek konusa je jednakokrako-pravougli trougao. Kolika je zapremina (volumen) konusa ako njegov omotač (plašt) iznosi $81\pi\sqrt{2}$ kvadratnih jedinica?

276. Kako se odnose zapremine (volumeni) jednakostranog cilindra i jednakostranog konusa ako su im jednaki osni presjeci?

277. Kako se odnose

a) površine omotača (plašteva) b) zapremine (volumeni)

jednakostranog cilindra i jednakostranog konusa ako se površine njihovih osnih presjeka odnose kao $1:\sqrt{3}$?

278. a) Kako se odnose zapremine (volumeni) jednakostranog cilindra i jednakostranog konusa pri jednakoj površini?

b) Kako se odnose površine takvih tijela pri jednakoj zapremini?

279. Dijametar (prečnik, promjer) baze jednakostranog konusa $d=12$. Kolika je visina jednakostranog cilindra jednake zapremine (volumena)?

280. Konus i cilindar imaju jednake omotače (plašteve). Kod konusa je $r:h=8:15$ a kod cilindra $R:H=1:17$. Kako se odnose zapremine (volumeni) oba tijela?

281. Iznad kruga (r) nalazi se prav (uspravan) konus i prav cilindar jednakih visina H.

a) U kom odnosu su površine omotača (plašteva) oba tijela?

b) Može li omotač cilindra biti dvaput veći od omotača konusa?

c) Može li površina cilindra biti dvaput veća od površine konusa?

282. Zamislimo u pravom (uspravnom) cilindru ($r=18,\ H=24$) dva konusa od kojih svaki ima sa cilindrom zajedničku bazu a vrh mu leži u centru suprotne baze cilindra. Kolika je površina, a kolika zapremina onog prostornog oblika, koji je zajednički jednom i drugom konusu?

283. Iz kruga radijusa a je isječen:

a) sekstant b) kvadrant c) polukrug

i presavijen u omotač (plašt) konusa. Kolika je zapremina nastalog konusa?

284. Izračunajte zapreminu (volumen) konusa čija je površina 90π a izvodnica (stranica) je za 3 duža od dijametra baze.

285. U pravi konus (uspravni stožac) je:

a) upisana b) oko njega opisana

pravilna četvorostrana piramida. Kolike su zapremine (volumeni) piramida ako je radijus baze konusa $r=5$ cm a visina $H=12$ cm?

286. U pravi konus (R, H) je upisan cilindar čija je visina jednaka polovini visine konusa. Kako se odnose zapremine (volumeni) oba tijela?

287. Zadana je pravilna četvorostrana piramida osnovne ivice (brida) $a=10$ i visine $H=12$. Kako se odnose:

a) površine omotača (plašteva) b) zapremine (volumeni)

upisanog i opisanog konusa?

288. Zadana je pravilna trostrana piramida osnovne ivice (brida) a i i visine H. Kako se odnose:

a) površine omotača (plašteva) b) zapremine (volumeni)

upisanog i opisanog konusa?

289. Zadana je pravilna šestostrana piramida. Kako su odnose zapremine (volumeni) upisanog i opisanog konusa?

290. Radijus baze, visina i izvodnica (stranica) konusa su tri uzastopna prirodna broja. Površina konusa je 24π. Kolika mu je zapremina (volumen)?

291. Iznad kruga (r) se dižu dva prava (uspravna) konusa čije su izvodnice nagnute prema bazi za uglove od 30° i 60°. Kolike su površine i zapremine (volumeni) oba tijela?

292. Površina pravog (uspravnog) konusa je brojno dvaput veća od njegove zapremine (volumena), a površina omotača se odnosi prema površini baze ako 5:3. U kojem odnosu su V i Y, gdje je Y zapremina upisane lopte (kugle) i gdje je V zapremina konusa.

293. Karakterističan presjek kosog konusa je pravougli trougao (pravokutni trokut) čija je hipotenuza dijametar baze a jedan ugao (kut) mu iznosi 30°. Kolika je zapremina (volumen) konusa?

294. Stranice karakterističnog presjeka kosog konusa su $s=9$, $2r=10$ i $S=17$. Kolika je zapremina (volumen) konusa?

9. Zarubljeni konus (zarubljena kupa, krnji stožac)

Presjekom konusa ravni (ravninom) koja je paralelna s bazom (osnovom, osnovicom) konusa, nastaje zarubljeni konus (krnji stožac) (sl. 19). On je ograničen dijelovima paralelnih ravni, koji su njegove baze (osnove) i dijelom konusne plohe, koji je njegov omotač (plašt). Ako su baze konusa krugovi, on se zove zarubljeni kružni konus *).

Prava (pravac) koja spaja centre baza zarubljenog konusa je njegova osa (os). Presjek konusa ravni (ravninom) koja prolazi kroz njegovu osu, zove se osni presjek konusa. Svaka ravan koja prolazi kroz osu zarubljenog konusa presijeca njegov omotač u izvodnicama konusa.

Ako je osa zarubljenog konusa normalna na njegove baze, konus je prav (uspravan); ako je osa kosa prema bazi, konus je kos.

Ako su R i r radijusi baza pravog zarubljenog konusa, s njegova izvodnica, a H visina, onda je njegova površina

$$P = \pi [R^2 + r^2 + s(R + r)],$$

a zapremina (volumen)

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Sl. 19

Presjeci zarubljenog konusa

295. Zadan je zarubljeni konus (krnji stožac) ($R = 8$, $r = 2$, $H = 9$). Po sredini visine onog konusa koji obrazuje zadani zarubljeni konus sa svojom dopunom (dopunskim konusom) prolazi ravan (ravnina) paralelno s bazama. Kolika je visina dopunskog konusa? Koliki je radijus kruga u kome ta ravan presijeca konus?

296. Zarubljeni konus (krnji stožac) (R, r, H) treba presjeći paralelno s bazom tako da površina presječnog kruga bude

a) geometrijska sredina b) aritmetička sredina c) harmonijska sredina površina obiju baza. U kojoj udaljenosti od veće baze treba da leži presjek?

297. Površine baza pravog zarubljenog konusa (uspravnog krnjeg stošca) su $B_1 = 16$ i $B_2 = 1$. Visina konusa je podijeljena na tri jednaka dijela ravnima koje presijecaju konus paralelno s bazama. Kolike su površine presjeka?

*) U zadacima o zarubljenom konusu misli se uvijek na kružni zarubljeni konus. Zvaćemo ga kraće zarubljeni konus (zarubljena kupa, krnji stožac).

298. Zamislimo u unutrašnjosti jednakostranog cilindra postavljena dva prava konusa tako da se baza jednog konusa poklapa sa jednom bazom cilindra, baza drugog konusa sa drugom bazom cilindra, a visina svakoga od njih iznosi $\frac{2}{3}$ visine cilindra. Koliki je radijus kružnice u kojoj se presijecaju omotači (plaštevi) zamišljenih konusa?

299. Zamislimo u pravom zarubljenom konusu upisana dva prava (uspravna) konusa čije se baze poklapaju sa bazama zadanog zarubljenog konusa, a vrhovi im leže u centrima baza. Koliki je radijus kružnice u kojoj se presijecaju omotači (plaštevi) tih konusa?

300. Zadan je prav zarubljen konus (uspravan krnji stožac) čiji su radijusi baza R i r. Zamislimo da su u tom zarubljenom konusu smještena dva konusa čije se baze poklapaju sa njegovim bazama. Vrh onoga konusa koji leži nad krugom radijusa R ima vrh u centru suprotne baze, a drugi konus ima vrh u sredini osi zadanog zarubljenog konusa. Koliki je radijus ϱ kružnice u kojoj se presijecaju omotači (plaštevi) upisanih konusa?

301. Zadana je pravilna četvorostrana zarubljena piramida čije su osnovne ivice (bridovi) $a = 4\sqrt{2}$ i $b = 2$, a bočna ivica $c = \sqrt{34 - 8\sqrt{2}}$. Kolika je izvodnica (stranica) zarubljenog konusa kome je jedna baza krug opisan oko kvadrata stranice a, a druga baza krug upisan u kvadrat stranice b?

302. Zadana je pravilna trostrana zarubljena piramida čije su osnovne ivice (bridovi) $a = 4\sqrt{3}$ i $c = 2\sqrt{3}$ a visina $H = 4$. Kolika je izvodnica zarubljenog konusa (krnjeg stošca) kome je jedna baza krug opisan oko trougla (trokuta) stranice a, a druga baza je krug upisan u trougao stranice c?

Površina i zapremina (volumen) zarubljenog konusa

303. Radijusi baza uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) su R i r, visina mu je H a izvodnica s. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) konusa ako je zadano:

a) $R = 6$, $r = 2$, $H = 3$ b) $R = 7$, $r = 2$, $s = 13$

c) $R = 9$, $H = 8$, $s = 10$ d) $r = 2$, $H = 15$, $s = 17$.

304. Kolika je zapremina (volumen) zarubljenog konusa (krnjeg stošca) kome je visina jednaka

a) aritmetičkoj b) geometrijskoj c) harmonijskoj

sredini radijusa obiju baza ako je $R = 9$ i $r = 1$?

305. Kolika je zapremina (volumen) uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) ako su radijusi njegovih baza $R = 7$, $r = 2$, a površina iznosi 170π?

306. Površina uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) je $P = 308\pi$, izvodnica $s = 17$ a radijus baze $R = 10$. Kolika je zapremina konusa?

307. Kolika je zapremina (volumen) uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) kome je izvodnica $s = 5$, razlika radijusa baza $R - r = 3$, a površina omotača (plašta) jednaka sumi površina obiju baza?

308. Radijusi baza uspravnog zarubljenog konusa iznose $R = 9$, $r = 3$, a izvodnica s je nagnuta prema bazi za ugao $\alpha = 60°$. Kolika je zapremina toga konusa?

309. Površina pravog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) je $P = 71\pi$, izvodnica $s = 6$, a nagibni ugao (prikloni kut) izvodnice prema bazi $\alpha = 60°$. Kolika je zapremina (volumen) zarubljenog konusa?

310. Polovina kružnog prstena (vijenca) čiji su radijusi $R = 10$, $r = 4$ savije se u omotač (plašt) uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca). Kolika je zapremina (volumen) konusa kao i nagibni ugao (prikloni kut) izvodnice prema bazi?

311. Zapremina (volumen) uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) je $V = 28\pi$, visina mu je $H = 4$, a suma baza iznosi 17π. Kolika je površina konusa? Može li se u ovaj konus upisati lopta (kugla)?

312. U uspravnom zarubljenom konusu (krnjem stošcu) donja baza je 36 puta, a omotač (plašt) 70 puta veći od gornje baze. Koliki ugao (kut) zatvara izvodnica sa bazom konusa?

313. Prav konus ($R = 6$, $H = 8$) presječen je paralelno s bazom tako da je tim presjekom omotač (plašt) prepolovljen. Kolike su izvodnice i visine nastalih konusa? Kolika je zapremina zarubljenog konusa (krnjeg stošca)?

314. Prav (uspravan) konus radijusa baze $R = 10$ i visine $H = 24$ je presječen s ravni (ravninom) paralelnom bazi tako da je tim presjekom omotač (plašt) prepolovljen. Kolika je zapremina (volumen) nastalog zarubljenog konusa (krnjeg stošca)?

315. Uspravni zarubljeni konus (krnji stožac) ($R = 9$, $r = 3$, $H = 8$) presječen je paralelno s bazama tako da mu je omotač (plašt) prepolovljen. Kolike su zapremine (volumeni) nastalih dijelova?

316. Ravan (ravnina) presijeca zarubljeni konus (R, r, H) paralelno s bazama tako da je tim presjekom zapremina (volumen) konusa raspolovljena. Koliki je radijus (ϱ) presječnog kruga?

317. Ravan (ravnina) presijeca jednakostrani konus paralelno s bazom tako da je površina omotača (plašta) prepolovljena. Kolika je zapremina (volumen) nastalog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) ako je R radijus baze zadanog konusa?

318. Uspravni konus visine $H = 12$ presječen je paralelno s bazom na dva dijela, tako da nastali zarubljeni konus ima zapreminu (volumen) $V_1 = \frac{2600\pi}{27}$, a dopunski konus $V_2 = \frac{100\pi}{27}$. Kolike su površine omotača (plašteva) nastalih konusa?

319. Uspravni konus ($R = 9$, $H = 12$) presječen je paralelno s bazom tako da se površina omotača nastalog zarubljenog konusa odnosi prema površini omotača zadanog konusa kao 8 : 9. Kolika je zapremina (volumen) zarubljenog konusa?

320. Neko računa zapreminu (volumen) zarubljenog konusa prema obrascu za zapreminu cilindra iste visine, kome je radijus baze aritmetička sredina radijusa R i r baza zarubljenog konusa.

a) Koliku grešku on čini?

b) Kolika će biti greška ako se analogni račun provede za konus?

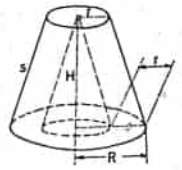
321. Zamislimo iznad baza jednakostranog cilindra upisana dva konusa tako da svakom od njih leži vrh u centru suprotne baze. Koliki dio zapremine (volumena) V cilindra zauzima nastali dvostruki zarubljeni konus?

322. U prav (uspravan) zurubljeni konus (R, r, H) upisana su dva konusa jednake zapremine (volumena) čije se baze poklapaju sa bazama zadatog konusa, a zajednički vrh im leži na njegovoj osi.

a) U kojoj udaljenosti (x) od veće baze treba da leži zajednički vrh upisanih konusa?

b) Kako se odnosi zapremina (volumen) zarubljenog konusa prema sumi zapremina upisanih konusa ako je $R = 3$, $r = 2$, $H = 13$?

323. Radijusi baza uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca) (sl. 20) su $R = 11$, $r = 2$ a visina $H = 12$. Iz toga konusa je izrezan i odstranjen konus čiji je vrh u centru manje baze, a izvodnice su paralelne sa izvodnicama zadanog konusa. Kolika je površina a kolika zapremina (volumen) preostale geometrijske figure?



Sl. 20

324. Zapremina (volumen) kocke je V. Oko njezine donje baze je opisan krug, a u gornju bazu je upisan krug. Kolika je zapremina zarubljenog konusa kome su ti krugovi baze?

10. Sfera, lopta (kugla)

Geometrijsko mjesto tačaka u prostoru koje su podjednako udaljene od neke zadane tačke, zove se sferna ploha (površ) ili sfera (kuglina ploha). Ta zadana tačka je centar sfere. Tijelo ograničeno sfernom plohom (sferom) zove se lopta (kugla). Centar sfere je ujedno i centar odgovarajuće lopte.

Kad krug rotira oko svog dijametra on opisuje loptu. Pri tome kružnica opisuje sferu.

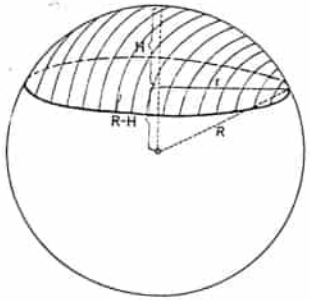
Radijus (poluprečnik, polumjer) lopte (sfere) je duž (dužina) koja spaja njezin centar sa bilo kojom tačkom sfere. Duž koja spaja dvije tačke na sferi, a prolazi kroz njezin centar, zove se dijametar (prečnik, promjer) sfere.

Presjek sfere i ravni je kružnica. Ravni presjeci neke sfere, koji su podjednako udaljeni od njezinog centra, su jednake kružnice. Od dva presjeka neke sfere, koji nisu podjednako udaljeni od centra, duži radijus ima onaj presjek, koji je bliži centru. Najduži radijus ima onaj presjek koji se dobija kada ravan prolazi kroz centar sfere. Takav presjek se zove velika kružnica sfere (glavni kuglin krug).

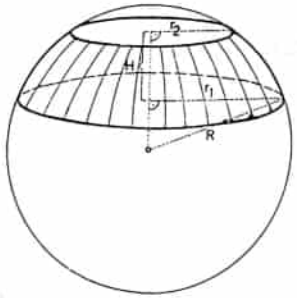
Kroz dvije tačke na sferi koje nisu krajevi istog dijametra može se položiti samo jedna velika kružnica. Dvije velike kružnice sfere se uzajamno polove u dijametralno suprotnim tačkama.

Ravan (ravnina) koja ima sa sferom samo jednu zajedničku tačku, zove se tangentna ravan (tangencijalna ravnina). Tangentna ravan sfere je normalna na radijus koji spaja dodirnu tačku sa centrom sfere. Tangenta sfere je prava koja sa sferom ima samo jednu zajedničku tačku.

Ravan (ravnina) koja siječe sferu dijeli je na dva dijela koji se zovu kalote (kapice) (sl. 21). Dio sfere između dvije paralelne ravni zove se zona ili pojas (sl. 22).



Sl. 21



Sl. 22

Loptin odsječak ili segment je dio lopte koji je ograničen ravni (ravninom) i odgovarajućom sfernom kalotom. Krug presjeka je baza (osnova, osnovka) odsječka, a udaljenost između ravni presjeka i tangentne ravni kalote, koja je paralelna s ravni presjeka, je visina odsječka.

Dio lopte, ograničen omotačem (plaštem) konusa, koji ima vrh u centru lopte, i pripadnom sfernom kalotom, zove se loptin isječak (sektor, kuglin isječak) (sl. 23).

Dio lopte koji se nalazi između dvije paralelne ravni (ravnine) zove se loptin sloj (kuglin sloj).

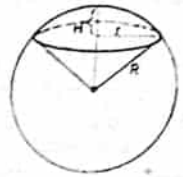
Ako je R radijus lopte, njezina je površina $P = 4R^2\pi$.

Površina kalote i zone se dobija po obrascu $P = 2R\pi H$ gdje je H visina kalote, odnosno zone.

Zapremina (volumen) lopte je $V = \frac{4}{3}R^3\pi$.

Zapremina loptinog isječka je $V = \frac{2}{3}R^2\pi H$.

Zapremina loptinog odsječka je $V = \frac{H^2\pi}{3}(3R - H)$



Sl. 23

gdje je H visina odsječka, ili, $V = \frac{H\pi}{6}(3r^2 + H^2)$ gdje je r radijus baze odsječka.

Zapremina (volumen) loptinog sloja je $V = \frac{H\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$ gdje su r_1 i r_2 radijusi baza sloja.

Presjeci sfere i lopte

325. Četiri nekomplanarne*) tačke A, B, C i D jednoznačno određuju sferu. — Dokažite!

326. Sfera je jednoznačno određena kružnicom k i tačkom A izvan te kružnice koja ne leži u njezinoj ravni (ravnini). — Dokažite!

327. Sfera je jednoznačno određena sa dva kruga koji leže u paralelnim ravnima (ravninama) tako da je centralna razdaljina S_1S_2 krugova normalna na te ravni. — Dokažite!

328. Sfera se može opisati oko:

a) pravog (uspravnog) cilindra
b) svakog konusa
c) pravog zarubljenog konusa
d) kocke
e) pravouglog paralelepipeda
f) svake pravilne piramide
g) svake pravilne zarubljene piramide. — Dokažite!

329. Kroz dvije tačke A i B sfere, koje nisu krajevi istog dijametra, može se povući samo jedna velika kružnica (glavni krug). — Dokažite!

330. Kroz tri tačke sfere prolazi jedna i samo jedna kružnica koja leži na toj sferi. — Dokažite!

331. Šta je geometrijsko mjesto centara jednakih krugova neke sfere?

332. Šta je geometrijsko mjesto svih tangenata sfere koje su paralelne sa zadanom pravom?

333. Šta je geometrijsko mjesto svih tangenata koje se mogu povući iz tačke izvan sfere na sferu?

*) Za tačke, koje leže u istoj ravni (ravnini), kažemo da su komplanarne.

334. Šta je geometrijsko mjesto jednakih i međusobno paralelnih tetiva sfere?

335. Šta je geometrijsko mjesto svih međusobno jednakih tetiva koje prolaze kroz istu tačku sfere?

336. Šta je geometrijsko mjesto svih međusobno jednakih tetiva koje prolaze kroz istu tačku unutar sfere?

337. Zadane su tri tačke A, B i C sfere i njezin radijus R. Konstruišite sferu!

338. Sfera zadanog radijusa R treba da presijeca zadanu ravan (ravninu) π u zadanoj kružnici radijusa r. Gdje leži centar sfere?

339. U triedar upišite sferu zadanog radijusa R koja dodiruje:

a) sve njegove strane b) sve njegove ivice (bridove).

340. Kroz zadanu pravu (pravac) p izvan sfere položite tangentnu ravan (tangencijalnu ravninu) na sferu.

341. Zadanu ravan π treba da dodiruje sfera zadanog radijusa R u zadanoj tački A. Gdje leži centar sfere?

342. Ako povoljna ravan (ravnina) presijeca dvije koncentrične sfere, površina nastalog kružnog prstena (vijenca) između presječnih kružnica je uvijek stalna. — Dokažite!

343. Koliki je obim (opseg) i površina kruga u kome ravan (ravnina) presijeca sferu radijusa $R=10$ ako je centralna udaljenost te ravni $d=8$?

344. Dvije paralelne ravni (ravnine) čija je međusobna udaljenost $d=2$ presijecaju sferu u kružnicama radijusa $r_1=6$ i $r_2=8$. Koliki je radijus sfere?

345. Dvije ravni (ravnine) čije se centralne udaljenosti odnose kao 5:6 presijecaju sferu u kružnicama čiji su radijusi $r_1=15$ i $r_2=7$. Koliki je radijus sfere?

346. Koliki je radijus sfere koja se može opisati oko:

a) pravilne jednakoivične trostrane prizme

b) pravilne trostrane prizme kod koje je bočna strana jednaka bazi, ako je osnovna ivica a?

347. U sferu zadanog radijusa R upisana je pravilna trostrana piramida čija se visina odnosi prema osnovnoj ivici kao 2:1. Kolika je visina piramide?

348. Iz sfere (R) treba izrezati što veći:

a) jednakostrani cilindar b) jednakostrani konus.

Kolike su njihove visine?

349. U isječak sfere (R) čiji ugao (kut) pri vrhu osnog presjeka iznosi 60° upisana je sfera. Koliki joj je radijus?

350. Koliki je radijus R sfere koja se može upisati u pravilnu četvorostranu piramidu osnovne ivice (brida) a i bočne ivice $\frac{a\sqrt{34}}{6}$?

351. Oko sfere zadanog radijusa R je opisan prav (uspravan) konus čija je visina šest puta duža od radijusa sfere. Koliki je radijus baze konusa?

352. Unutar sfere je zadana tačka M. Koja tačka sfere ima najmanju, a koja najveću udaljenost od tačke M?

353. Između svih ravni (ravnina), koje prolaze kroz jednu tačku unutar sfere, postoji jedna koja presijeca sferu po minimalnoj kružnici. Koja je to ravan?

354. Kroz pravu (pravac) p koja prodire kroz zadanu sferu, a ne prolazi kroz njezin centar, prolazi beskonačno mnogo ravni (ravnina), od kojih svaka presijeca sferu u nekoj kružnici. Koja od tih ravni određuje krug minimalne površine i koliki je radijus tog kruga?

355. Četiri jednake sfere (R) leže na horizontalnoj ravni (ravnini) π tako da njihovi centri obrazuju kvadrat, a svaka od njih dodiruje po dvije susjedne sfere. Na njima leži peta sfera jednake veličine tako da dodiruje sve četiri zadane sfere. U kojoj udaljenosti od ravni π leži centar pete sfere?

356. Na horizontalnoj ravni (ravnini) π leže tri jednake sfere (R) od kojih svaka dodiruje preostale dvije. Na njima leži jednaka četvrta sfera koja dodiruje preostale tri. U kojoj udaljenosti od ravni π leži centar četvrte sfere?

Površina sfere i njenih dijelova. Zapremina (volumen) lopte i njenih dijelova

357. Sfera je:

a) upisana u kocku b) opisana oko

kocke površine 96. Kolike su površine i zapremine tih sfera?

358. Izračunajte površinu sfere i zapreminu (volumen) pripadne lopte ako se sfera može opisati oko paralelepipeda čije se ivice (bridovi) odnose kao 2:3:6, a površina mu je brojno jednaka zapremini.

359. Radijusi triju sfera se odnose kao 1:4:8, a suma zapremina (volumena) odgovarajućih lopti iznosi $\frac{2308\pi}{3}$. Kolika je zapremina one lopte čija sfera ima površinu jednaku sumi površina zadanih sfera?

334. Šta je geometrijsko mjesto jednakih i međusobno paralelnih tetiva sfere?

335. Šta je geometrijsko mjesto svih međusobno jednakih tetiva koje prolaze kroz istu tačku sfere?

336. Šta je geometrijsko mjesto svih međusobno jednakih tetiva koje prolaze kroz istu tačku unutar sfere?

337. Zadane su tri tačke A, B i C sfere i njezin radijus R. Konstruišite sferu!

338. Sfera zadanog radijusa R treba da presijeca zadanu ravan (ravninu) π u zadanoj kružnici radijusa r. Gdje leži centar sfere?

339. U triedar upišite sferu zadanog radijusa R koja dodiruje:

a) sve njegove strane b) sve njegove ivice (bridove).

340. Kroz zadanu pravu (pravac) p izvan sfere položite tangentnu ravan (tangencijalnu ravninu) na sferu.

341. Zadanu ravan π treba da dodiruje sfera zadanog radijusa R u zadanoj tački A. Gdje leži centar sfere?

342. Ako povoljna ravan (ravnina) presijeca dvije koncentrične sfere, površina nastalog kružnog prstena (vijenca) između presječnih kružnica je uvijek stalna. — Dokažite!

343. Koliki je obim (opseg) i površina kruga u kome ravan (ravnina) presijeca sferu radijusa $R=10$ ako je centralna udaljenost te ravni $d=8$?

344. Dvije paralelne ravni (ravnine) čija je međusobna udaljenost $d=2$ presijecaju sferu u kružnicama radijusa $r_1=6$ i $r_2=8$. Koliki je radijus sfere?

345. Dvije ravni (ravnine) čije se centralne udaljenosti odnose kao 5:6 presijecaju sferu u kružnicama čiji su radijusi $r_1=15$ i $r_2=7$. Koliki je radijus sfere?

346. Koliki je radijus sfere koja se može opisati oko:

a) pravilne jednakoivične trostrane prizme

b) pravilne trostrane prizme kod koje je bočna strana jednaka bazi, ako je osnovna ivica a?

347. U sferu zadanog radijusa R upisana je pravilna trostrana piramida čija se visina odnosi prema osnovnoj ivici kao 2:1. Kolika je visina piramide?

348. Iz sfere (R) treba izrezati što veći:

a) jednakostrani cilindar b) jednakostrani konus.

Kolike su njihove visine?

349. U isječak sfere (R) čiji ugao (kut) pri vrhu osnog presjeka iznosi 60° upisana je sfera. Koliki joj je radijus?

350. Koliki je radijus R sfere koja se može upisati u pravilnu četvorostranu piramidu osnovne ivice (brida) a i bočne ivice $\frac{a\sqrt{34}}{6}$?

351. Oko sfere zadanog radijusa R je opisan prav (uspravan) konus čija je visina šest puta duža od radijusa sfere. Koliki je radijus baze konusa?

352. Unutar sfere je zadana tačka M. Koja tačka sfere ima najmanju, a koja najveću udaljenost od tačke M?

353. Između svih ravni (ravnina), koje prolaze kroz jednu tačku unutar sfere, postoji jedna koja presijeca sferu po minimalnoj kružnici. Koja je to ravan?

354. Kroz pravu (pravac) p koja prodire kroz zadanu sferu, a ne prolazi kroz njezin centar, prolazi beskonačno mnogo ravni (ravnina), od kojih svaka presijeca sferu u nekoj kružnici. Koja od tih ravni određuje krug minimalne površine i koliki je radijus tog kruga?

355. Četiri jednake sfere (R) leže na horizontalnoj ravni (ravnini) π tako da njihovi centri obrazuju kvadrat, a svaka od njih dodiruje po dvije susjedne sfere. Na njima leži peta sfera jednake veličine tako da dodiruje sve četiri zadane sfere. U kojoj udaljenosti od ravni π leži centar pete sfere?

356. Na horizontalnoj ravni (ravnini) π leže tri jednake sfere (R) od kojih svaka dodiruje preostale dvije. Na njima leži jednaka četvrta sfera koja dodiruje preostale tri. U kojoj udaljenosti od ravni π leži centar četvrte sfere?

Površina sfere i njenih dijelova. Zapremina (volumen) lopte i njenih dijelova

357. Sfera je:

a) upisana u kocku b) opisana oko

kocke površine 96. Kolike su površine i zapremine tih sfera?

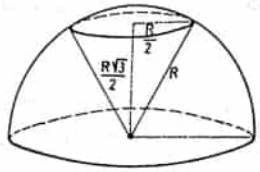
358. Izračunajte površinu sfere i zapreminu (volumen) pripadne lopte ako se sfera može opisati oko paralelepipeda čije se ivice (bridovi) odnose kao 2:3:6, a površina mu je brojno jednaka zapremini.

359. Radijusi triju sfera se odnose kao 1:4:8, a suma zapremina (volumena) odgovarajućih lopti iznosi $\frac{2308\pi}{3}$. Kolika je zapremina one lopte čija sfera ima površinu jednaku sumi površina zadanih sfera?

360. U poluloptu (R) je upisan jednakostrani konus (sl. 24) sa vrhom u centru lopte, kojoj je ta polulopta dio. Kako se odnosi njegova zapremina (volumen) prema zapremini polulopte?

361. a) Tačkasti izvor svjetlosti je udaljen od centra sfere (R) za d. Kolika je površina osvijetljenog dijela sfere?

b) U kojoj udaljenosti d od centra sfere (R) mora biti tačkasti izvor svjetlosti da bude osvijetljen n-ti dio površine sfere?



Sl. 24

362. Na visini $H = 60$ km kruži oko Zemlje ($R = 6370$ km) satelit. Kolika je površina onog dijela Zemlje koji se vidi iz satelita?

363. U kojoj udaljenosti od centra sfere (R) treba da leži tačkasti izvor svjetlosti pa da osvijetljena kalota bude po površini jednaka velikom (glavnom) loptinom krugu?

364. Sferu ($r = 5$) osvjetljava veća sfera ($R = 15$). Kolika je površina osvijetljene kalote manje sfere ako je udaljenost centara sfera $d = 25$?

365. Dijametar sfere (R) je podijeljen na tri jednaka dijela. Kolike su površine nastalih dviju kalota i zone?

366. Sferu (R) presijeca ravan (ravnina) tako da je jedna od nastalih kalota n-puta veća od druge. Kolike su visine tih kalota?

367. U jednakoivičnu četvorostranu piramidu ivice (brida) a upisana je sfera. Koliko je njezina površina?

368. U sferu (R) je upisan cilindar kome površina iznosi $\frac{3}{4}$ površine sfere. Koliki su radijus baze i visina cilindra?

369. Oko lopte (R) opisan je prav konus (uspravan stožac) čija je visina šest puta duža od radijusa lopte. Kako se odnose površine a kako zapremine (volumeni) oba tijela?

370. Oko sfere $\left(R = \frac{3}{2}\right)$ je opisan prav konus (uspravan stožac) (r, s, H) čija je površina baze jednaka površini sfere. Kako se odnosi zapremina (volumen) lopte prema zapremini konusa?

371. U prav konus (uspravan stožac) ($r = 5$, $s = 13$) upisana je sfera. Kolika je njezina površina a kolika zapremina (volumen) odgovarajuće lopte?

372. Oko kružnice (R) je opisan jednakostraničan trougao (trokut) i kvadrat kome su dvije stranice paralelne sa simetralom trougla. Čitava figura rotira oko te simetrale. Kako se odnose: a) površine, b) a kako zapremine nastalih obrtnih (rotacionih) tijela?

373. Cjelokupna površina polulopte iznosi 27π kvadratnih jedinica. Kolika je zapremina (volumen) te polulopte?

374. Dvije sfere (R i r) se dodiruju:

a) izvana b) iznutra.

Kroz dodirnu tačku je položena ravan (ravnina) koja presijeca obje sfere. Kako se odnose površine nastalih kalota koje leže:

a) s raznih strana b) s iste strane

u odnosu na tu ravan?

375. Kolika je visina kalote na sferi radijusa $R = 5$ ako je površina kalote pet puta veća od površine kruga u kome ravan (ravnina) odsijeca kalotu?

376. Oko sfere ($R = 24$) opisan je prav konus (uspravan stožac) čiji je vrh udaljen od centra sfere za $d = 40$. U kom odnosu su površine kalota koje na sferi obrazuje ona ravan (ravnina) koja prolazi kroz dodirne tačke omotača konusa i sfere?

377. U kojoj udaljenosti od tjemena treba presjeći poluloptu (R) paralelno sa njezinim osnovnim krugom pa da cjelokupne površine oba dobivena dijela budu međusobno jednake?

378. Kod nekog loptinog (kuglinog) isječka odnosi se površina kalote prema omotaču (plaštu) pripadnog konusa kao 1 : 2. Kolika je visina kalote ako je R radijus lopte?

379. U prav konus (uspravan stožac) čija visina iznosi $\frac{2}{3}$ dijametra baze upisana je lopta. Kako se odnosi:

a) površina pripadne sfere prema omotaču (plaštu) konusa

b) zapremina (volumen) lopte prema zapremini konusa?

380. Kolika je površina i zapremina (volumen) lopte upisane u prav konus (uspravan stožac) čija je visina $H = 12$ a izvodnica $s = 13$?

381. Ugao (kut) osnog (osovinskog) presjeka loptinog isječka iznosi:

a) 120° b) 60° c) 90°.

Kolika je zapremina isječka ako je radijus lopte R?

382. Koliki je radijus lopte na kojoj postoji isječak zapremine (volumena) $V = 72\pi$ čiji je ugao (kut) na osnom presjeku $\alpha = 120°$?

383. Kolika je zapremina (volumen) loptinog (kuglinog) isječka kome je omotač pripadnog konusa jednak:

a) P b) $\frac{2}{3}P$ c) $\frac{5}{2}P$

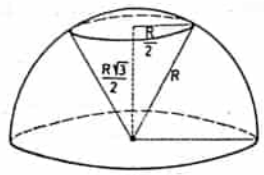
gdje je P površina pripadne kalote?

384. Kolika je zapremina (volumen) loptinog (kuglinog) isječka u kome je zapremina pripadnog segmenta jednaka:

a) V b) $\frac{1}{2}V$ c) $\frac{3}{2}V$

gdje je V zapremina pripadnog konusa?

360. U poluloptu (R) je upisan jednakostrani konus (sl. 24) sa vrhom u centru lopte, kojoj je ta polulopta dio. Kako se odnosi njegova zapremina (volumen) prema zapremini polulopte?



Sl. 24

361. a) Tačkasti izvor svjetlosti je udaljen od centra sfere (R) za d. Kolika je površina osvijetljenog dijela sfere?

b) U kojoj udaljenosti d od centra sfere (R) mora biti tačkasti izvor svjetlosti da bude osvijetljen n-ti dio površine sfere?

362. Na visini $H = 60$ km kruži oko Zemlje ($R = 6370$ km) satelit. Kolika je površina onog dijela Zemlje koji se vidi iz satelita?

363. U kojoj udaljenosti od centra sfere (R) treba da leži tačkasti izvor svjetlosti pa da osvijetljena kalota bude po površini jednaka velikom (glavnom) loptinom krugu?

364. Sferu ($r = 5$) osvjetljava veća sfera ($R = 15$). Kolika je površina osvijetljene kalote manje sfere ako je udaljenost centara sfera $d = 25$?

365. Dijametar sfere (R) je podijeljen na tri jednaka dijela. Kolike su površine nastalih dviju kalota i zone?

366. Sferu (R) presijeca ravan (ravnina) tako da je jedna od nastalih kalota n-puta veća od druge. Kolike su visine tih kalota?

367. U jednakoivičnu četvorostranu piramidu ivice (brida) a upisana je sfera. Koliko je njezina površina?

368. U sferu (R) je upisan cilindar kome površina iznosi $\frac{3}{4}$ površine sfere. Koliki su radijus baze i visina cilindra?

369. Oko lopte (R) opisan je prav konus (uspravan stožac) čija je visina šest puta duža od radijusa lopte. Kako se odnose površine a kako zapremine (volumeni) oba tijela?

370. Oko sfere $\left(R = \frac{3}{2}\right)$ je opisan prav konus (uspravan stožac) (r, s, H) čija je površina baze jednaka površini sfere. Kako se odnosi zapremina (volumen) lopte prema zapremini konusa?

371. U prav konus (uspravan stožac) ($r = 5$, $s = 13$) upisana je sfera. Kolika je njezina površina a kolika zapremina (volumen) odgovarajuće lopte?

372. Oko kružnice (R) je opisan jednakostraničan trougao (trokut) i kvadrat kome su dvije stranice paralelne sa simetralom trougla. Čitava figura rotira oko te simetrale. Kako se odnose: a) površine, b) a kako zapremine nastalih obrtnih (rotacionih) tijela?

373. Cjelokupna površina polulopte iznosi 27π kvadratnih jedinica. Kolika je zapremina (volumen) te polulopte?

374. Dvije sfere (R i r) se dodiruju:

a) izvana b) iznutra.

Kroz dodirnu tačku je položena ravan (ravnina) koja presijeca obje sfere. Kako se odnose površine nastalih kalota koje leže:

a) s raznih strana b) s iste strane

u odnosu na tu ravan?

375. Kolika je visina kalote na sferi radijusa $R = 5$ ako je površina kalote pet puta veća od površine kruga u kome ravan (ravnina) odsijeca kalotu?

376. Oko sfere ($R = 24$) opisan je prav konus (uspravan stožac) čiji je vrh udaljen od centra sfere za $d = 40$. U kom odnosu su površine kalota koje na sferi obrazuje ona ravan (ravnina) koja prolazi kroz dodirne tačke omotača konusa i sfere?

377. U kojoj udaljenosti od tjemena treba presjeći poluloptu (R) paralelno sa njezinim osnovnim krugom pa da cjelokupne površine oba dobivena dijela budu međusobno jednake?

378. Kod nekog loptinog (kuglinog) isječka odnosi se površina kalote prema omotaču (plaštu) pripadnog konusa kao 1 : 2. Kolika je visina kalote ako je R radijus lopte?

379. U prav konus (uspravan stožac) čija visina iznosi $\frac{2}{3}$ dijametra baze upisana je lopta. Kako se odnosi:

a) površina pripadne sfere prema omotaču (plaštu) konusa

b) zapremina (volumen) lopte prema zapremini konusa?

380. Kolika je površina i zapremina (volumen) lopte upisane u prav konus (uspravan stožac) čija je visina $H = 12$ a izvodnica $s = 13$?

381. Ugao (kut) osnog (osovinskog) presjeka loptinog isječka iznosi:

a) 120° b) 60° c) 90°.

Kolika je zapremina isječka ako je radijus lopte R?

382. Koliki je radijus lopte na kojoj postoji isječak zapremine (volumena) $V = 72\pi$ čiji je ugao (kut) na osnom presjeku $\alpha = 120°$?

383. Kolika je zapremina (volumen) loptinog (kuglinog) isječka kome je omotač pripadnog konusa jednak:

a) P b) $\frac{2}{3}P$ c) $\frac{5}{2}P$

gdje je P površina pripadne kalote?

384. Kolika je zapremina (volumen) loptinog (kuglinog) isječka u kome je zapremina pripadnog segmenta jednaka:

a) V b) $\frac{1}{2}V$ c) $\frac{3}{2}V$

gdje je V zapremina pripadnog konusa?

385. Cjelokupna površina loptinog segmenta iznosi 144π a radijus lopte je $R = 10$. Kolika je visina segmenta?

386. Zapremina loptinog segmenta (kuglinog odsječka) (R) iznosi $\frac{7}{9}$ zapremine pripadnog sektora (isječka). Kolika je visina segmenta?

387. Iznad baze konusa postavljen je takav loptin odsječak koji nadopunjuje konus na loptin isječak. Kolika je zapremina toga odsječka ako je radijus baze konusa $r = 5$, a visina $H = 12$?

388. Kolika je zapremina (volumen) onog loptinog odsječka koji nadopunjuje jednakostrani konus na loptin isječak i kolika je površina pripadne kalote ako je radijus pripadne lopte R?

389. Oko kocke je opisana sfera. Kolika je zapremina loptinog segmenta koji od lopte odsijeca ravan u kojoj leži jedna strana kocke?

390. Kolika je zapremina (volumen) loptinog segmenta čija je kalota $\frac{3}{2}$ puta veća od površine osnovnog kruga ako je radijus lopte R?

391. Baza segmenta lopte ($R = 13$) je krug radijusa $r = 12$. Kolika je površina i zapremina (volumen) tog segmenta ako je on:

a) manji b) veći

od polulopte?

392. Kolika je zapremina (volumen) onog loptinog (R) segmenta čija površina kalote je:

a) dvaput b) četiri puta

veća od površine pripadne baze?

393. U loptin (R) segment upisan je prav konus (uspravan stožac) tako da im se baze poklapaju. Kolika je visina konusa u slučaju ako je njegova zapremina (volumen) jednaka:

a) polovini b) trećini

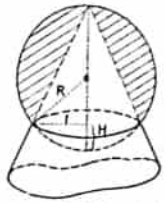
zapremine segmenta?

394. U loptin segment, čiji je radijus osnovnog kruga $r = 5$ i visina $h = 3$, je upisan i oko njega opisan prav konus. Kako se odnose zapremine sva tri tijela? (Vidite sliku 148!)

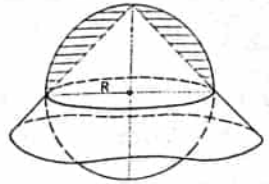
395. U krugu radijusa $R = 20$ je zadan kružni segment kome pripada centralni ugao (kut) od 120°. Taj segment rotira oko dijametra koji je paralelan sa tetivom segmenta. Kolika je zapremina geometrijske figure koja nastaje rotacijom segmenta?

396. Kroz loptu ($R = 20$) prodire kružna cilindrična ploha (površ) radijusa $r = 12$ tako da osa (os) cilindra prolazi kroz centar lopte. Kolika je zapremina onog dijela lopte koji ostaje izvan cilindrične plohe?

397. Kroz loptu ($R = 5$) prodire konusna ploha (površ) kao što pokazuje slika 25. Kolika je zapremina onog dijela lopte koji leži izvan konusne plohe ($r = 3$)?



Sl. 25



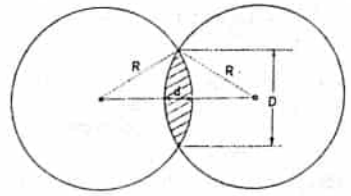
Sl. 26

398. Konusna ploha prodire kroz loptu kao što pokazuje slika 26. Kolika je zapremina onog dijela lopte koji leži izvan konusne plohe?

399. Dvije sfere jednakog radijusa R prodiru jedna kroz drugu tako da svaka prolazi kroz centar druge. Kolika je zapremina onog dijela prostora koji je zajednički objema loptama?

400. Granične plohe bikonveksnog sočiva (leće) su dvije jednake kalote (sl. 27). Kolika je zapremina sočiva ako je njegov dijametar $D = 12$ a debljina $d = 4$?

401. Kolika je zapremina (volumen) bikonveksnog sočiva (leće) debljine $d = 14$ ako sferne plohe koje ga omeđuju imaju radijuse $R_1 = 15$ i $R_2 = 13$?

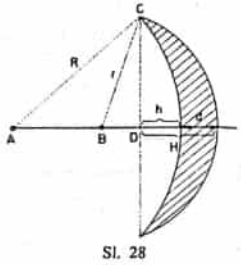


Sl. 27

402. Sočivo (leća) je omeđeno konkavnom sfernom plohom (sl. 28) radijusa R i konveksnom sfernom plohom kraćeg radijusa r. Debljina sočiva je d. Kolika je njegova zapremina (volumen)?

403. Sfera, zapremine $V = 288\pi$, presječena je ravninom na dva dijela tako da se površine nastalih kalota odnose kao 1 : 3. Kako se odnose zapremine pripadnih segmenata lopte?

404. Baze loptinog (kuglinog) sloja su krugovi radijusa $r_1 = 6$ i $r_2 = 8$, a visina mu iznosi $H = 4$. Kolika je njegova zapremina?



Sl. 28

405. Kolika je zapremina loptinog sloja ako je radijus lopte $R = 25$, a $d_1 = 15$ i $d_2 = 7$ su udaljenosti graničnih krugova od centra lopte?

406. Iznad velikog kruga lopte (R) nalazi se sloj čija je zona (pojas) jednaka velikom krugu lopte. Kolika je zapremina sloja?

385. Cjelokupna površina loptinog segmenta iznosi 144π a radijus lopte je $R = 10$. Kolika je visina segmenta?

386. Zapremina loptinog segmenta (kuglinog odsječka) (R) iznosi $\frac{7}{9}$ zapremine pripadnog sektora (isječka). Kolika je visina segmenta?

387. Iznad baze konusa postavljen je takav loptin odsječak koji nadopunjuje konus na loptin isječak. Kolika je zapremina toga odsječka ako je radijus baze konusa $r = 5$, a visina $H = 12$?

388. Kolika je zapremina (volumen) onog loptinog odsječka koji nadopunjuje jednakostrani konus na loptin isječak i kolika je površina pripadne kalote ako je radijus pripadne lopte R?

389. Oko kocke je opisana sfera. Kolika je zapremina loptinog segmenta koji od lopte odsijeca ravan u kojoj leži jedna strana kocke?

390. Kolika je zapremina (volumen) loptinog segmenta čija je kalota $\frac{3}{2}$ puta veća od površine osnovnog kruga ako je radijus lopte R?

391. Baza segmenta lopte ($R = 13$) je krug radijusa $r = 12$. Kolika je površina i zapremina (volumen) tog segmenta ako je on:

a) manji b) veći

od polulopte?

392. Kolika je zapremina (volumen) onog loptinog (R) segmenta čija površina kalote je:

a) dvaput b) četiri puta

veća od površine pripadne baze?

393. U loptin (R) segment upisan je prav konus (uspravan stožac) tako da im se baze poklapaju. Kolika je visina konusa u slučaju ako je njegova zapremina (volumen) jednaka:

a) polovini b) trećini

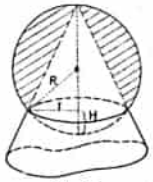
zapremine segmenta?

394. U loptin segment, čiji je radijus osnovnog kruga $r = 5$ i visina $h = 3$, je upisan i oko njega opisan prav konus. Kako se odnose zapremine sva tri tijela? (Vidite sliku 148!)

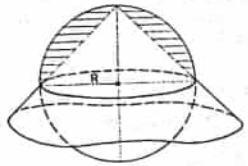
395. U krugu radijusa $R = 20$ je zadan kružni segment kome pripada centralni ugao (kut) od 120°. Taj segment rotira oko dijametra koji je paralelan sa tetivom segmenta. Kolika je zapremina geometrijske figure koja nastaje rotacijom segmenta?

396. Kroz loptu ($R = 20$) prodire kružna cilindrična ploha (površ) radijusa $r = 12$ tako da osa (os) cilindra prolazi kroz centar lopte. Kolika je zapremina onog dijela lopte koji ostaje izvan cilindrične plohe?

397. Kroz loptu ($R = 5$) prodire konusna ploha (površ) kao što pokazuje slika 25. Kolika je zapremina onog dijela lopte koji leži izvan konusne plohe ($r = 3$)?



Sl. 25



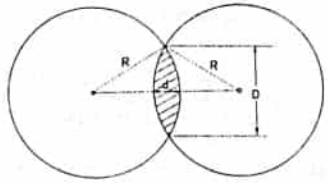
Sl. 26

398. Konusna ploha prodire kroz loptu kao što pokazuje slika 26. Kolika je zapremina onog dijela lopte koji leži izvan konusne plohe?

399. Dvije sfere jednakog radijusa R prodiru jedna kroz drugu tako da svaka prolazi kroz centar druge. Kolika je zapremina onog dijela prostora koji je zajednički objema loptama?

400. Granične plohe bikonveksnog sočiva (leće) su dvije jednake kalote (sl. 27). Kolika je zapremina sočiva ako je njegov dijametar $D = 12$ a debljina $d = 4$?

401. Kolika je zapremina (volumen) bikonveksnog sočiva (leće) debljine $d = 14$ ako sferne plohe koje ga omeđuju imaju radijuse $R_1 = 15$ i $R_2 = 13$?

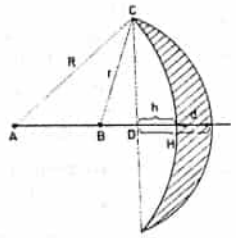


Sl. 27

402. Sočivo (leća) je omeđeno konkavnom sfernom plohom (sl. 28) radijusa R i konveksnom sfernom plohom kraćeg radijusa r. Debljina sočiva je d. Kolika je njegova zapremina (volumen)?

403. Sfera, zapremine $V = 288\pi$, presječena je ravninom na dva dijela tako da se površine nastalih kalota odnose kao 1 : 3. Kako se odnose zapremine pripadnih segmenata lopte?

404. Baze loptinog (kuglinog) sloja su krugovi radijusa $r_1 = 6$ i $r_2 = 8$, a visina mu iznosi $H = 4$. Kolika je njegova zapremina?



Sl. 28

405. Kolika je zapremina loptinog sloja ako je radijus lopte $R = 25$, a $d_1 = 15$ i $d_2 = 7$ su udaljenosti graničnih krugova od centra lopte?

406. Iznad velikog kruga lopte (R) nalazi se sloj čija je zona (pojas) jednaka velikom krugu lopte. Kolika je zapremina sloja?

11. Složenija obrtna (rotaciona) tijela

407. Kvadrat (a) rotira oko prave (pravca) koja prolazi izvan njega paralelno s jednom njegovom dijagonalom tako da je od najbližeg vrha (tjemena) kvadrata udaljena za polovinu kvadratove dijagonale. Kolika je površina i zapremina (volumen) nastalog obrtnog (rotacionog) tijela?

408. Kvadrat stranice a rotira oko ose koja prolazi izvan kvadrata

a) paralelno s jednom stranicom u udaljenosti d

b) kroz vrh (tjeme) kvadrata paralelno s dijagonalom.

Kolika je površina i zapremina (volumen) nastalog obrtnog tijela?

409. Jednakostraničan trougao (trokut) rotira oko prave (pravca) koja prolazi kroz jedan njegov vrh (tjeme) i normalna je na stranici trougla. Kolika je zapremina nastalog tijela ako mu je površina $P = 108\pi$?

410. Pravougli trougao (pravokutni trokut), čije su katete $a = 6$ i $b = 8$, rotira oko katete a, zatim oko b i na kraju oko hipotenuze c. Kako se odnose površine i zapremine (volumeni) nastalih tijela?

411. Jednakokraki trougao (trokut), čija je osnovica a i krak b, rotira:

a) oko svoje simetrale

b) oko prave (pravca) koja prolazi kroz tjeme (vrh) na osnovici paralelno sa simetralom trougla

c) oko prave koja prolazi kroz vrh trougla paralelno sa njegovom osnovicom.

Kolike su površine i zapremine (volumeni) nastalih tijela?

412. Jednakokraki trougao (trokut) osnovice a i visine h rotira oko kraka. Izračunajte površinu i zapreminu (volumen) nastalog tijela ako je $a = 6$, $h = 4$.

413. Jednakokraki trougao (trokut) osnovice $a = 10$ i kraka $b = 13$ rotira oko prave koja prolazi izvan trougla paralelno sa krakom u udaljenosti $d = 2$. Kolika je površina i zapremina (volumen) nastalog obrtnog (rotacionog) tijela?

414. Trougao, čije su stranice $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, rotira oko stranice b. Kolika je površina i zapremina nastalog tijela?

415. Romb, čije su dijagonale d_1 i d_2 rotira oko ose koja prolazi kroz njegov vrh (tjeme) paralelno sa dijagonalom d_1. Kolika je površina i zapremina (volumen) nastalog obrtnog tijela?

416. Romb, koji se sastoji od dva jednakostranična trougla (trokuta) stranice a, rotira oko prave (pravca) koja prolazi kroz vrh (tjeme) romba paralelno s njegovom visinom. Kolika je površina i zapremina (volumen) nastalog obrtnog tijela?

417. Jednakokraki trapez, čije su osnovice $a = 5$, $c = 3$, a jedan ugao (kut) iznosi 45° rotira:

a) oko kraće osnovice b) oko duže osnovice.

Kolike su površine i zapremine (volumeni) nastalih obrtnih (rotacionih) tijela?

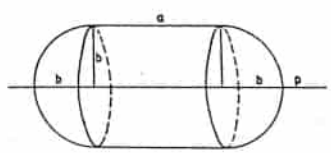
418. Pravilni šestougao (šesterokut) rotira:

a) oko svoje simetrale koja raspolavlja suprotne stranice

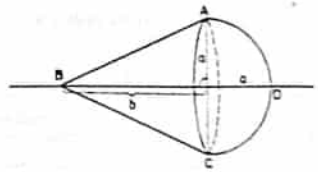
b) oko svoje simetrale koja prolazi kroz suprotna tjemena (vrhove).

Kolika je površina i zapremina (volumen) nastalog obrtnog tijela ako je a stranica šestougla?

419. Figura sastavljena od pravougaonika (pravokutnika) (a, b) i dva kružna kvadranta (sl. 29) rotira oko prave p. Kolika je površina i zapremina nastalog obrtnog tijela?



Sl. 29



Sl. 30

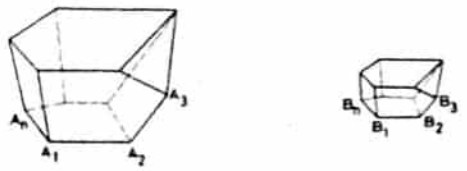
420. Figura $ABCD$ (sl. 30) rotira oko svoje simetrale BD. Kolika je površina i zapremina nastalog obrtnog (rotacionog) tijela?

12. Podudarni (sukladni) i slični poliedri

Dva tijela su podudarna (sukladna) ako se mogu dovesti do potpunog poklapanja.

Dva podudarna poliedra imaju redom jednake sve odgovarajuće (homologne) ivice (bridove), sve odgovarajuće strane i sve odgovarajuće uglove (kutove).

Ako dva poliedra $A_1A_2A_3\ldots A_n$ i $B_1B_2B_3\ldots B_n$ (sl. 31) imaju jednak broj tjemena (vrhova) i ako se ta tjemena (vrhovi) mogu tako pridružiti da su u pridruženim tjemenima (vrhovima) A_1 i B_1, A_2 i B_2, A_3 i B_3, ..., A_n i B_n pripadni uglovi (kutovi) jednaki, a pridružene ivice (bridovi) A_1A_2 i B_1B_2, A_2A_3 i B_2B_3, ..., A_nA_1 i B_nB_1 proporcionalne, tj. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_nA_1}{B_nB_1}=k$, kažemo da su zadani poliedri slični. Broj k je koeficijent (omjer, odnos) sličnosti tih poliedara.



Sl. 31

U dva slična poliedra su homologne strane slični poligoni, homologni uglovi i rogljevi su jednaki, a homologne duži (dužine) proporcionalne.

Odnos površina dva slična poliedra jednak je kvadratu koeficijenata sličnosti, ili, što je isto, površine sličnih poliedara se odnose kao kvadrati homolognih ivica (bridova).

Odnos zapremina (volumena) dvaju sličnih poliedara jednak je kubu njihovog koeficijenta sličnosti, ili, što je isto, zapremine sličnih poliedara se odnose kao kubovi homolognih ivica.

421. Sa koliko ravni (ravnina) je moguće presjeći:

a) kocku
b) pravilnu četvorostranu prizmu
c) pravougli paralelepiped
d) pravilnu šestostranu prizmu
e) pravilni tetraedar
f) pravilnu četvorostranu piramidu
g) prav (uspravan) valjak
h) prav konus (uspravan stožac)
i) sferu

tako da se dobiju dva podudarna tijela?

422. Ivice (bridovi) pravouglog (pravokutnog) paralelepipeda su $a=2$, $b=3$, $c=4$. Kolike su ivice a_1, b_1, c_1 njemu sličnog tijela čija je zapremina (volumen) osam puta veća?

423. Baza prizme iznosi $B=4\ \text{cm}^2$, a visina $H=3$ cm. Kolika je baza B_1 i visina H_1 slične prizme koja ima:

a) devet puta veću površinu
b) osam puta veću zapreminu?

424. Dvije homologne ivice (brida) sličnih piramida iznose 2 i 3, a površine im se razlikuju za 20. Kolike su te površine?

425. Valjak ima radijus baze $r=3$ cm i visinu $H=5$ cm. Izračunajte r_1 i H_1 njemu sličnog valjka koji ima četiri puta veću površinu.

426. Zapremine (volumeni) dvaju sličnih cilindara se odnose kao 7 : 12. Kako se odnose njihovi omotači (plaštevi)?

427. Zapremine (volumeni) dvaju sličnih cilindara su $V_1=12\pi$ i $V_2=324\pi$. Kolike su im površine ako se visine razlikuju za 6?

428. Suma površina dvaju sličnih cilindara iznosi 300π, a visine su im $H_1=2$ i $H_2=6$. Kolika je površina svakog od njih?

429. Koliki je koeficijent sličnosti površina, a koliki zapremina (volumena) dviju sfera radijusa r_1 i r_2?

430. Kada su slične dvije:

a) prizme
b) piramide
c) cilindra
d) konusa
e) sfere?

13. Pravilni poliedri

Poliedri čije su sve strane pravilni podudarni mnogouglovi (sukladni mnogokuti) i čiji su diedri jednaki, zovu se pravilni poliedri.

Postoji samo pet pravilnih poliedara.

Pravilni tetraedar (sl. 32) je ograničen sa četiri podudarna jednakostranična trougla (trokuta).

Sl. 32

Sl. 33

Sl. 34

Pravilni oktaedar (sl. 33) je ograničen sa osam podudarnih jednakostraničnih trouglova.

Pravilni ikosaedar (sl. 34) je ograničen sa dvadeset podudarnih jednakostraničnih trouglova.

Sl. 35

Sl. 36

Pravilni heksaedar (kocka) (sl. 35) je ograničen sa šest podudarnih kvadrata.

Pravilni dodekaedar (sl. 36) je ograničen sa dvadeset podudarnih pravilnih petouglova (peterokuta).

431. Sredine ivice (bridova) pravilnog tetraedra su vrhovi pravilnog oktaedra. — Dokažite!

432. Težišta strana pravilnog tetraedra su vrhovi jednog drugog tetraedra. — Dokažite!

433. Sredine strana kocke su vrhovi jednog pravilnog oktaedra. — Dokažite!

434. U pravilan tetraedar je upisana i oko njega opisana sfera. Koliki su njihovi radijusi ako je ivica (brid) tetraedra a?

435. Kolika je površina, a kolika zapremina (volumen).

a) pravilnog tetraedra b) pravilnog oktaedra

ivice (brida) a?

436. Oko pravilnog oktaedra je:

a) opisana b) i u njega upisana

sfera. Koliki su njihovi radijusi?

437. Kako se odnose zapremine (volumeni) pravilnog oktaedra i kocke ako imaju jednake površine?

438. Ivica (brid):

a) pravilnog tetraedra b) pravilnog oktaedra

c) kocke d) pravilnog ikosaedra

iznosi $a = 5$ cm. Kolika je ivica (brid) b njima sličnih poliedara koji imaju 16 puta veću površinu?

439. Ivica (brid):

a) pravilnog tetraedra b) pravilnog oktaedra

c) kocke d) pravilnog ikosaedra

iznosi $a = 3$ cm. Kolika je ivica (brid) njima sličnih poliedara čija je zapremina (volumen) 125 puta veća?

14. Mješoviti i složeniji zadaci za ponavljanje stereometrije

Prava (pravac) i ravan (ravnina) u prostoru

440. Dvije ravni (ravnine) π_1 i π_2, koje su normalne na istu pravu p, međusobno su paralelne. — Dokažite!

441. Prava p u kojoj se presijecaju dvije ravni π_1 i π_2 koje su normalne na treću ravan π, normalna je na ovu ravan. — Dokažite!

442. Kako glasi teorema obrnuta teoremi iz zadatka 62?

443. Kako glasi teorema obrnuta teoremi iz zadatka 63?

444. Ravan (ravnina) α koja je normalna na bilo koju pravu p neke ravni β, normalna je i na ravan β. — Dokažite!

445. Svaka ravan (ravnina) koja normalno siječe ivicu (brid) diedra, normalna je i na njegove strane. — Dokažite!

446. Nađite centar simetrije, ose simetrije i ravni simetrije figure koja se sastoji od dvije prave koje se sijeku!

447. Na pravoj (pravcu) p zadane su redom tačke A, B i C, a na pravoj q tačke A_1, B_1 i C_1 tako da je $AB:AC=A_1B_1:A_1C_1$. Polovišta duži AA_1, BB_1 i CC_1 leže na jednoj istoj pravoj bez obzira na to da li su prave p i q paralelne, ukrštene ili mimoilazne (mimosmjerne). — Dokažite!

448. U tjemenu (vrhu) pravog ugla pravouglog trougla (kuta pravokutnog trokuta) podiže se normala $n=9\sqrt{65}$ na ravan (ravninu) u kojoj leži trougao. Krajnja tačka normale udaljena je od krajeva hipotenuze za $d_1=87$ i $d_2=81$. Izračunajte hipotenuzu trougla.

Prizma

449. Osnovne ivice (bridovi) prave (uspravne) trostrane prizme odnose se kao $3:4:5$, bočna površina je osam puta veća od baze prizme, a suma njezinih osnovnih i bočne ivice iznosi 32. Kolika je zapremina (volumen) prizme?

450. Suma ivica (bridova) pravouglog (pravokutnog) paralelepipeda iznosi 12, površina mu je 94, a od ivica se može sastaviti pravougli trougao (pravokutni trokut). Koliki je radijus sfere koja se može opisati oko paralelepipeda?

451. Zna se prostorna dijagonala kvadra $D=7$ i suma ivica (bridova) $a+b+c=11$. Ako ivice porastu redom za 1, 2 i 3, površina kvadra poraste za 102. Kolike su ivice kvadra?

452. Površina kvadra iznosi 22, zapremina (volumen) 6 a obim (opseg) baze 6. Kolike su ivice (bridovi) kvadra?

453. Baza prave (uspravne) trostrane prizme je jednakokraki trougao (trukut) kome je krak duži od osnovice. Ako se prizma položi na svoju bazu, visina joj je 100. Ako se položi na manju bočnu stranu, visina joj je 78, a ako se položi na veću bočnu stranu, visina joj je 60. Kolika je površina i zapremina (volumen) prizme?

454. Bočne strane prave (uspravne) trostrane prizme iznose 6, 8 i 10, a površina baze je 6. Kolika je zapremina (volumen) prizme?

455. Baza prave (uspravne) prizme je jednakokraki trapez čije su osnovice a i c. Površina dijagonalnog presjeka prizme je P a zapremina (volumen) V. Kolika je visina v baze prizme?

Piramida

456. Suma odstojanja bilo koje unutrašnje tačke pravilnog tetraedra od njegovih strana je stalna veličina i jednaka njegovoj visini. — Dokažite!

457. Bočna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide iznosi $b=\sqrt{34}$, a njezina površina $P=96$. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

458. Osnovne ivice (bridovi) trostrane piramide su $a=13$, $b=14$, $c=15$, a bočna ivica je $d=21\frac{1}{8}$. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

459. Obim (opseg) baze pravilne četvorostrane piramide iznosi 24, a površina dijagonalnog presjeka je $3\sqrt{14}$. Kolika je površina i zapremina (volumen) piramide?

460. Bočna površina pravilne četvorostrane piramide je M, a visina piramide H. Kolika je osnovna ivica (brid) piramide?*

461. Baza pravilne četvorostrane piramide se odnosi prema omotaču (pobočju) kao $3:5$. Izrazite zapreminu (volumen) piramide kao funkciju radijusa r sfere upisane u piramidu.

462. Iznad kvadrata stranice $a=6\sqrt{2}$ dižu se na suprotne strane dvije pravilne četvorostrane piramide tako da se oko ovako složene figure može opisati sfera koja prolazi kroz sva njegova tjemena (vrhove). Kolika je ukupna zapremina piramida ako je visina jedne piramide $H_1=9$?

463. a) Osnovna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide je $a = 6$ a nagibni ugao (prikloni kut) bočne strane (pobočke) prema bazi je $\alpha = 60°$. Kolika je površina i zapremina (volumen) upisane sfere?
b) Isti zadatak ako je $\alpha = 30°$.

464. Visina pravilne četvorostrane piramide je kraća od visine bočne strane (pobočke) za 1, a od osnovne ivice (brida) za 2. Koliki je radijus sfere koja se može upisati u piramidu?

465. U pravilnu četvorostranu piramidu osnovne ivice (brida), $a = 40$, i bočne ivice, $b = 30$, upisana je kocka tako da njena gornja baza predstavlja jedan presjek piramide. Kolika je zapremina kocke?

466. Piramidu baze B presijeca ravan (ravnina) paralelno s bazom u zlatnom presjeku. Kolika je površina dobivenog presjeka?

467. Pokažite da iz obrasca za zapreminu (volumen) zarubljene (krnje) piramide slijede obrasci za zapreminu: a) piramide b) prizme, kao specijalni slučajevi.

468. Zadane su površine baza $B_1 = 2500\ \text{cm}^2$, $B_2 = 400\ \text{cm}^2$ i bočna površina $M = 1365\ \text{cm}^2$ pravilne četvorostrane zarubljene piramide. Kolika je površina i zapremina potpune piramide čiji je dio zadana zarubljena piramida?

469. Površine baza pravilne četvorostrane zarubljene (krnje) piramide iznose $B_1 = 196$ i $B_2 = 16$ a bočna površina (pobočje) $M = 468$ kvadratnih jedinica. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

470. Od piramide, čija je baza $B = 144$ i zapremina $V = 432$, odsječena je zarubljena (krnja) piramida zapremine $V_1 = 416$. U kojoj udaljenosti od vrha piramide je učinjen presjek?

471. Nad kvadratom stranice $a = 10$ dižu se na istu stranu prava prizma i prava piramida. Kolika je zapremina onog dijela piramide koji leži unutar prizme ako oba tijela treba da imaju jednake površine i jednake zapremine (volumene)?

472. Kolika je visina pravilnog tetraedra čija je zapremina (volumen) V?

473. Kolika je zapremina (volumen) i bočna površina (pobočje) pravilne četvorostrane piramide ako je bočna ivica (brid) b, a dijametar kružnice, upisane u bazu piramide, d?

Cilindar

474. Omotač (plašt) cilindra, razvijen u ravan (ravninu), je kvadrat stranice a. Kolika je zapremina (volumen) V cilindra?

475. Pravougaonik (pravokutnik), čije su stranice a i b, može se na dva načina saviti u omotač (plašt) cilindra. Kako se odnose zapremine (volumeni) nastalih cilindara?

476. Izračunajte radijus r baze i visinu H pravog (uspravnog) cilindra ako je njegova površina $P = 28\pi$ a zapremina $V = 20\pi$.

477. Kako se odnose zapremine pravilnih šestostranih prizmi od kojih je jedna upisana u jednakostrani cilindar a druga opisana oko njega?

478. Ivice (bridovi) kvadra se odnose kao 2 : 4 : 5. Kako se odnose zapremine (volumeni) triju cilindara koji se mogu opisati oko kvadra?

479. Zapremina (volumen), jednakostranog cilindra iznosi 532π. Kolika je zapremina pravilne šestostrane prizme upisane u cilindar?

480. Prav (uspravan) cilindar čiji je radijus baze $r = 4$ i visina $H = 15$ presječen je koso tako da je najduža izvodnica $S = 15$, a najkraća $s = 9$. Izračunajte površine i zapremine (volumene) dobivenih dijelova!

481. a) Za koju dužinu x treba produžiti radijus baze i visinu jednakostranog cilindra tako da se površina udvostruči?
b) Za koliko treba produžiti radijus baze jednakostranog cilindra tako da se površina upetostruči, s tim da se visina ne mijenja?

482. Za koju dužinu x treba produžiti radijus baze jednakostranog cilindra (ne mijenjajući mu visinu) tako da mu površina postane n-puta veća. Koje vrijednosti može primiti prirodni broj n ako se traži da x bude racionalan, ako je takav i r?

Konus

483. Kolika je zapremina pravog konusa čija je površina jednaka 9π, a visina H je geometrijska sredina između izvodnice s i radijusa r baze?

484. Površina pravog (uspravnog) konusa iznosi 90π, a zapremina (volumen) 100π. Izračunajte radijus r baze, izvodnicu s i visinu H konusa. (Bikvadratna jednačina).

485. Kolika je površina i zapremina konusa (stošca) ako je njegova visina $H = 8$ a omotač (plašt) $M = 60\pi$? (Bikvadratna jednačina)

486. Stranice s, $2r$ i S karakterističnog presjeka kosog konusa su tri uzastopna prirodna broja, a površina mu iznosi 84 kvadratne jedinice. Kolika je zapremina (volumen) konusa?

487. Najduža izvodnica kosog konusa je $S = 15$, najkraća $s = 13$, a dijametar baze $2r = 4$. U kom odnosu je zapremina konusa prema zapremini upisane sfere?

488. Izvodnica (stranica) uspravnog konusa je s, a obim (opseg) baze O. Kolika je zapremina (volumen) konusa?

489. Omotač (plašt) pravog (uspravnog) konusa iznosi $\frac{2}{3}$ površine konusa. Koji ugao (kut) zatvara visina konusa sa njegovom izvodnicom?

490. U prav (uspravan) konus radijusa baze $R = 15$ i izvodnice $s = 39$ upisana je sfera. Kolika je zapremina (volumen) zarubljenog konusa (krnjeg stošca) koji nastaje ako zadani konus presiječe ona tangentna ravan (ravnina) sfere, koja je paralelna sa bazom konusa?

463. a) Osnovna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide je $a = 6$ a nagibni ugao (prikloni kut) bočne strane (pobočke) prema bazi je $\alpha = 60°$. Kolika je površina i zapremina (volumen) upisane sfere?

b) Isti zadatak ako je $\alpha = 30°$.

464. Visina pravilne četvorostrane piramide je kraća od visine bočne strane (pobočke) za 1, a od osnovne ivice (brida) za 2. Koliki je radijus sfere koja se može upisati u piramidu?

465. U pravilnu četvorostranu piramidu osnovne ivice (brida), $a = 40$, i bočne ivice, $b = 30$, upisana je kocka tako da njena gornja baza predstavlja jedan presjek piramide. Kolika je zapremina kocke?

466. Piramidu baze B presijeca ravan (ravnina) paralelno s bazom u zlatnom presjeku. Kolika je površina dobivenog presjeka?

467. Pokažite da iz obrasca za zapreminu (volumen) zarubljene (krnje) piramide slijede obrasci za zapreminu: a) piramide b) prizme, kao specijalni slučajevi.

468. Zadane su površine baza $B_1 = 2500\ \text{cm}^2$, $B_2 = 400\ \text{cm}^2$ i bočna površina $M = 1365\ \text{cm}^2$ pravilne četvorostrane zarubljene piramide. Kolika je površina i zapremina potpune piramide čiji je dio zadana zarubljena piramida?

469. Površine baza pravilne četvorostrane zarubljene (krnje) piramide iznose $B_1 = 196$ i $B_2 = 16$ a bočna površina (pobočje) $M = 468$ kvadratnih jedinica. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

470. Od piramide, čija je baza $B = 144$ i zapremina $V = 432$, odsječena je zarubljena (krnja) piramida zapremine $V_1 = 416$. U kojoj udaljenosti od vrha piramide je učinjen presjek?

471. Nad kvadratom stranice $a = 10$ dižu se na istu stranu prava prizma i prava piramida. Kolika je zapremina onog dijela piramide koji leži unutar prizme ako oba tijela treba da imaju jednake površine i jednake zapremine (volumene)?

472. Kolika je visina pravilnog tetraedra čija je zapremina (volumen) V?

473. Kolika je zapremina (volumen) i bočna površina (pobočje) pravilne četvorostrane piramide ako je bočna ivica (brid) b, a dijametar kružnice, upisane u bazu piramide, d?

Cilindar

474. Omotač (plašt) cilindra, razvijen u ravan (ravninu), je kvadrat stranice a. Kolika je zapremina (volumen) V cilindra?

475. Pravougaonik (pravokutnik), čije su stranice a i b, može se na dva načina saviti u omotač (plašt) cilindra. Kako se odnose zapremine (volumeni) nastalih cilindara?

476. Izračunajte radijus r baze i visinu H pravog (uspravnog) cilindra ako je njegova površina $P = 28\pi$ a zapremina $V = 20\pi$.

477. Kako se odnose zapremine pravilnih šestostranih prizmi od kojih je jedna upisana u jednakostrani cilindar a druga opisana oko njega?

478. Ivice (bridovi) kvadra se odnose kao 2 : 4 : 5. Kako se odnose zapremine (volumeni) triju cilindara koji se mogu opisati oko kvadra?

479. Zapremina (volumen), jednakostranog cilindra iznosi 532π. Kolika je zapremina pravilne šestostrane prizme upisane u cilindar?

480. Prav (uspravan) cilindar čiji je radijus baze $r = 4$ i visina $H = 15$ presječen je koso tako da je najduža izvodnica $S = 15$, a najkraća $s = 9$. Izračunajte površine i zapremine (volumene) dobivenih dijelova!

481. a) Za koju dužinu x treba produžiti radijus baze i visinu jednakostranog cilindra tako da se površina udvostruči?

b) Za koliko treba produžiti radijus baze jednakostranog cilindra tako da se površina upetostruči, s tim da se visina ne mijenja?

482. Za koju dužinu x treba produžiti radijus baze jednakostranog cilindra (ne mijenjajući mu visinu) tako da mu površina postane n-puta veća. Koje vrijednosti može primiti prirodni broj n ako se traži da x bude racionalan, ako je takav i r?

Konus

483. Kolika je zapremina pravog konusa čija je površina jednaka 9π, a visina H je geometrijska sredina između izvodnice s i radijusa r baze?

484. Površina pravog (uspravnog) konusa iznosi 90π, a zapremina (volumen) 100π. Izračunajte radijus r baze, izvodnicu s i visinu H konusa. (Bikvadratna jednačina).

485. Kolika je površina i zapremina konusa (stošca) ako je njegova visina $H = 8$ a omotač (plašt) $M = 60\pi$? (Bikvadratna jednačina)

486. Stranice s, $2r$ i S karakterističnog presjeka kosog konusa su tri uzastopna prirodna broja, a površina mu iznosi 84 kvadratne jedinice. Kolika je zapremina (volumen) konusa?

487. Najduža izvodnica kosog konusa je $S = 15$, najkraća $s = 13$, a dijametar baze $2r = 4$. U kom odnosu je zapremina konusa prema zapremini upisane sfere?

488. Izvodnica (stranica) uspravnog konusa je s, a obim (opseg) baze O. Kolika je zapremina (volumen) konusa?

489. Omotač (plašt) pravog (uspravnog) konusa iznosi $\frac{2}{3}$ površine konusa.

Koji ugao (kut) zatvara visina konusa sa njegovom izvodnicom?

490. U prav (uspravan) konus radijusa baze $R = 15$ i izvodnice $s = 39$ upisana je sfera. Kolika je zapremina (volumen) zarubljenog konusa (krnjeg stošca) koji nastaje ako zadani konus presiječe ona tangentna ravan (ravnina) sfere, koja je paralelna sa bazom konusa?

491. Nad krugom radijusa $R = 5$ dižu se na istu stranu uspravan cilindar i konus. Kolika je zapremina onog dijela konusa koji leži unutar cilindra ako oba tijela treba da imaju jednake površine i jednake zapremine?

492. Zapremina (volumen) konusa je V. Njegova visina je podijeljena na tri jednaka dijela i kroz dijelišne tačke su položene ravni (ravnine) paralelno s bazom konusa. Kolika je zapremina V_1 srednjeg dijela?

Sfera

493. U poluloptu je upisana trostrana piramida tako da joj vrh leži u tjemenu polulopte a baza u osnovnom krugu. Kolika je zapremina (volumen) piramide ako su njezine osnovne ivice (bridovi) $a = 78$, $b = 50$, $c = 32$?

494. Oko sfere je opisana pravilna trostrana prizma. Kako se odnose površine sfere i prizme?

495. Sferu (R) presijeca ravan π, a u dobivenom krugu su upisani kvadrat i pravilni šestougao (šesterokut). Iznad tih figura dižu se na suprotne strane prave (uspravne) piramide čiji vrhovi (tjemena) leže na sferi. U kojoj udaljenosti x od centra sfere treba položiti ravan π da nastale piramide imaju jednake zapremine (volumene)?

496. Oko pravouglog (pravokutnog) paralelepipeda čiji su bridovi (ivice) $a = 4$, $b = 6$, $c = 12$ opisana je sfera. Kolika je površina najveće kalote koju odsijeca proširena strana paralelepipeda od te sfere?

497. U sferu (R) je upisan cilindar kome je omotač (plašt) jednak sumi baza. Kako se odnose zapremine, a kako površine cilindra i sfere?

498. Oko sfere (r) je opisan cilindar i jednakostrani konus. Kako se odnose površine, a kako zapremine sva tri tijela?

499. Oko sfere čija je površina $P = 48\pi$ opisan je uspravan zarubljeni konus (krnji stožac) kod koga je nagibni ugao (prikloni kut) izvodnice prema bazi $\alpha = 60°$. Kolika je površina i zapremina konusa?

500. Oko sfere (ϱ) je opisan uspravan zarubljeni konus kome je nagibni ugao (prikloni kut) izvodnice prema bazi 60°. Kolika je površina i zapremina (volumen) konusa?

501. Ako se u prav konus (uspravni stožac) upiše sfera, onda se površine oba tijela odnose kao njihove zapremine (volumeni). — Dokažite!

502. Donja baza uspravnog zarubljenog konusa (krnjeg stošca), u koji se može upisati sfera radijusa $\varrho = 4$, šesnaest puta je veća od gornje baze. Kolika je površina, a kolika zapremina konusa?

503. Zapremina lopte iznosi $\frac{256\pi}{3}$. Zapremina uspravnog zarubljenog konusa koji je opisan oko te lopte iznosi $\frac{21}{8}$ zapremine lopte. Koliki je omotač (plašt) konusa?

504. a) Oko sfere radijusa $\varrho = 3$ opisan je zarubljeni konus (krnji stožac) triput veće površine. Kako se odnose zapremine oba tijela?

b) Ponoviti prethodni zadatak ako je površina konusa n-puta veća od površine sfere.

505. U sferu je upisan prav (uspravan) konus tako da centar sfere dijeli visinu konusa u zlatnom presjeku. Kolika je zapremina konusa ako je R radijus sfere?

Zadaci sa Moskovskih matematičkih olimpijada

506. Bočna ivica (brid) pravilne trostrane priramide je 1 a zapremina $\frac{1}{6}$.

Koliki je ivični ugao (kut) bočne strane pri vrhu piramide?

507. Obim (opseg) figure koja se dobije kada pravilan tetraedar presijeca ravan (ravnina) koja je paralelna sa dvije mimoilazne ivice (mimosmjerna brida) je konstantan. — Dokažite!

508. Kolika je udaljenost između dvije mimoilazne ivice pravilnog tetraedra ako je zadana njegova ivica (brid) a?

509. Suma uglova (kutova) prostornog četvorougla (četverokuta) je manja od 360°. — Dokažite!

510. Koliko ravni (ravnina) postoji koje su podjednako udaljene od četiri nekomplanarne tačke?

511. U prostoru su zadane četiri tačke A, B, C i D. Ako su projekcije četvorougla $ABCD$ na dvije neparalelne ravni (ravnine) u prostoru paralelogrami, onda je četvorougao $ABCD$ paralelogram. — Dokažite!

512. U prostoru su zadane tačke A, B, C i D i pri tome je $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$. Dokažite da je i $AD \perp BC$!

15. Stereometrijski zadaci sa primjenom trigonometrije

Poliedri

513. Osnovne ivice (bridovi) pravouglog (pravokutnog) paralelepipeda su a i b, a njegova dijagonala zatvara se bazom ugao (kut) α. Kolika je bočna površina (pobočje) paralelepipeda?

514. Najduža dijagonala pravilne šestostrane prizme ima dužinu α, a sa bočnom ivicom zatvara ugao α. Kolika je zapremina (volumen) prizme?

515. Bočna ivica (brid) b pravilne četvorostrane piramide zatvara sa bazom piramide ugao (kut) α. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

516. Zapremina (volumen) pravilne četvorostrane piramide je V. Nagibni ugao (prikloni kut) bočne ivice (brida) prema bazi je α. Kolika je bočna ivica (brid) piramide?

517. Osnovne ivice pravog (uspravnog) paralelepipeda su a i b, a oštri ugao (šiljasti kut) među njima α. Duža dijagonala baze je jednaka kraćoj dijagonali paralelepipeda. Kolika je njegova zapremina (volumen)?

518. Dijagonale pravog (uspravnog) paralelepipeda iznose 9 cm i $\sqrt{33}$ cm. Obim (opseg) baze je 18 cm, a bočna ivica (brid) iznosi 4 cm. Kolika je površina i zapremina (volumen) paralelepipeda?

519. Bočna ivica pravilne trostrane piramide je $b=2\sqrt{5}$, a visina piramide je $H=2$. Koliki je nagibni ugao α bočne strane (pobočke) prema bazi?

520. Kolika je zapremina (volumen) pravilne četvorostrane piramide ako se zna nagibni ugao (prikloni kut) α bočne ivice (brida) prema bazi i površina P dijagonalnog presjeka piramide?

521. Baza pravilne piramide je poligon čija suma uglova (kutova) iznosi 540°. Kolika je zapremina (volumen) piramide ako je α nagibni ugao njezine bočne ivice b prema bazi?

522. Baza četvorostrane piramide je pravougaonik (pravokutnik) čija je dijagonala d, a α ugao (kut) među dijagonalama. Kolika je zapremina (volumen) piramide ako je β nagibni ugao bočne ivice prema bazi?

523. Baza piramide je jednakokraki trougao (trukut) čiji su kraci a, a ugao (kut) među njima α. Sve bočne ivice zatvaraju sa bazom ugao β. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

524. Baza prave (uspravne) prizme je jednakokraki trougao (trokut) čija je osnovica a, a α ugao (kut) na osnovici. Kolika je zapremina prizme ako je bočna površina (pobočje) jednako sumi površina baza?

525. Osnovna ivica (brid) pravilne trostrane piramide je a, a bočna strana (pobočka) zatvara sa bazom ugao (kut) φ. Kolika je zapremina (volumen) i površina piramide?

526. Površina pravilne trostrane piramide je P. Kolika je osnovna ivica (brid) a piramide ako bočna strana (pobočka) zatvara sa bazom ugao α?

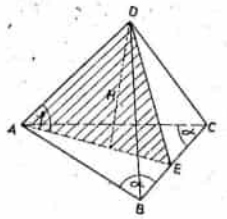
527. Baza uspravne piramide je romb čiji je oštri ugao (šiljasti kut) α. Nagibni ugao bočne strane (prikloni kut pobočke) prema bazi je β. Kolika je zapremina i površina piramide ako je r radijus kružnice upisane u romb?

528. Baza pravog (uspravnog) paralelepipeda je romb. Ravan (ravnina) koja prolazi kroz jednu stranicu donje baze i suprotnu stranicu gornje baze obrazuje sa bazom prizme ugao (kut) β. Kolika je bočna površina (pobočje) M parelelepipeda ako je P površina presjeka u kome pomenuta ravan presijeca paralelepiped?

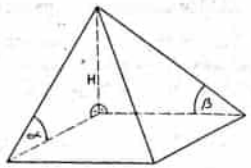
529. Baza piramide je jednakokraki trougao (trokut) s uglom (kutom) α na osnovici. Svaka bočna strana (pobočka) zatvara se bazom piramide ugao (kut) φ. Udaljenost od centra kružnice upisane u bazu piramide do sredine njezine bočne visine iznosi d. Kolika je površina P piramide?

530. Baza piramide je poligon opisan oko kruga radijusa r. Obim (opseg) poligona je $2s$, a nagibni ugao svake bočne strane (prikloni kut pobočke) prema bazi je φ. Kolika je zapremina (volumen) piramide?

531. Baza trostrane piramide je jednakokraki trougao (trokut) s uglom α pri osnovici (sl. 37). Nagibni ugao (prikloni kut) bočnih ivica (bridova) prema bazi je $\varphi=90°-\alpha$. Površina presjeka ADE piramide je P. Kolika je zapremina (volumen) V piramide?



Sl. 37



Sl. 38

532. Baza piramide je pravougaonik (pravokutnik) (sl. 38). Dvije bočne strane (pobočke) su normalne na bazu piramide a ostale dvije zatvaraju s njom uglove α i β. Kolika je zapremina (volumen) V piramide ako je njezina visina H?

533. Baza piramide je kvadrat. Od dviju suprotnih bočnih ivica (bridova) jedna je normalna na bazu piramide, a druga zatvara s njom ugao (kut) β i ima dužinu b. Kolike su dužine ostalih bočnih ivica?

534. Baza piramide je jednakostraničan trougao (trokut) stranice a. Jedna bočna ivica (brid) je normalna na bazu, a ostale zatvaraju s njom ugao (kut) β. Kolika je površina najveće bočne strane (pobočke) piramide?

535. Baza piramide je jednakokraki trougao (trokut) čiji su kraci b i zatvaraju ugao (kut) od 120°. Bočna ivica (brid) piramide, koja prolazi kroz vrh tupog ugla, normalna je na bazu piramide, a ostale dvije zatvaraju s njom ugao α. Kolika je površina presjeka u kom presijeca piramidu ravan (ravnina) koja prolazi kroz najdužu stranicu baze piramide i sredinu ivice koja je normalna na bazu?

536. Kolika je zapremina V pravilne četvorostrane prizme ako njezina dijagonala zatvara sa bočnom stranom (pobočkom) ugao (kut) $\alpha = 30°$, a osnovna ivica (brid) je a?

537. Baza prave (uspravne prizme je pravougli trougao (pravokutni trokut) hipotenuze c i oštrog ugla (šiljastog kuta) α. Kroz hipotenuzu donje baze i vrh pravog ugla gornje baze prolazi ravan (ravnina) koja zatvara sa bazom prizme ugao β. Kolika je zapremina trostrane piramide koju ta ravan odsijeca od prizme?

538. Baza prave (uspravne) prizme je četvorougao (četverokut) u kome su dva suprotna ugla (kuta) prava. Dijagonala baze koja spaja vrhove uglova koji nisu pravi, ima dužinu d i dijeli jedan od tih uglova na dijelove α i β. Površina presjeka koji prolazi kroz drugu dijagonalu normalno na bazu, iznosi P. Kolika je zapremina (volumen) prizme?

539. Osnovna ivica (brid) pravilne trostrane piramide je a. Presjek piramide koji raspolavlja ugao između bočnih strana (pobočaka) je pravougli trougao (pravokutni trokut). Kolika je zapremina (volumen) piramide?

540. Bočna ivica (brid) pravilne trostrane zarubljene (krnje) piramide zatvara sa bazom ugao α. Donja osnovna ivica je a, a gornja $b\,(a>b)$. Kolika je zapremina piramide?

541. Baze pravilne četvorostrane zarubljene piramide su kvadrati čije su stranice a i b $(a>b)$. Nagibni ugao (prikloni kut) bočne ivice (brida) prema bazi je α. Kolika je zapremina (volumen) zarubljene piramide?

Obla tijela

542. Izvodnica (stranica) s uspravnog konusa zatvara sa njegovom bazom ugao (kut) od 60°. Kolika je površina i zapremina konusa?

543. Omotač (plašt) cilindra, razvijen u ravan (ravninu), je pravougaonik (pravokutnik) čija dijagonala d zatvara sa osnovicom ugao α. Kolika je zapremina (volumen) V cilindra?

544. Ugao (kut) pri vrhu osnog presjeka uspravnog konusa je 2α, a suma njegove visine i izvodnice je m. Kolika je površina i zapremina konusa?

545. U bazi nekog konusa tetivi dužine a pripada centralni ugao α. Visina i izvodnica konusa zatvaraju ugao β. Kolika je zapremina konusa?

546. Nad kružnom bazom dižu se na istu stranu dva prava konusa. Ugao (kut) između visine i izvodnice manjeg konusa je α, a isti takav ugao kod većeg konusa je β. Razlika visina konusa je h. Kolika je zapremina (volumen) V prostora koji zatvaraju omotači (plaštevi) oba konusa?

547. Kroz vrh uspravnog konusa je položena ravan (ravnina) koja zatvara sa bazom konusa ugao (kut) φ, a bazu presijeca po tetivi kojoj pripada centralni ugao (kut) α. Kolika je zapremina (volumen) konusa ako je a udaljenost ravni od centra baze konusa?

548. U bazu pravog (uspravnog) konusa je upisan kvadrat stranice a. Ravan (ravina) koja prolazi kroz vrh konusa i stranicu kvadrata presijeca konus u trouglu (trokutu) čiji je ugao (kut) pri vrhu konusa jednak α. Kolika je zapremina V i površina P konusa?

549. Izvodnica (stranica) s pravog zarubljenog konusa (uspravnog krnjeg stošca) zatvara sa bazom ugao (kut) α, a normalna je na pravu koja spaja kraj te izvodnice na gornjoj bazi sa krajem suprotne izvodnice na donjoj bazi. Koliki je omotač (plašt) M zarubljenog konusa?

550. Izvodnica (stranica) pravog konusa (uspravnog stošca) zapremine V zatvara sa bazom ugao (kut) α. U kojoj udaljenosti od vrha treba ravan da presiječe konus paralelno s bazom da omotač bude prepolovljen?

551. Kolika je zapremina (volumen) i cijela površina loptinog (kuglinog isječka) ako je isječak izrezan iz lopte radijusa R, a ugao osnog presjeka je α?

552. Površina trougla (trokuta) ABC je P, stranica $AC = b$, a $\sphericalangle CAB = \alpha$. Kolika je zapremina (volumen) V obrtnog tijela koje nastaje rotacijom trougla oko stranice AB?

553. U trouglu (trokutu) je zadana stranica a i nalegli uglovi (priležeći kutovi) β i γ. Kolika je zapremina V tijela koje nastaje rotacijom trougla oko te stranice?

554. Romb kome je d duža dijagonala, a γ oštri ugao (šiljasti kut), rotira oko ose koja prolazi kroz vrh romba normalno na dužu dijagonalu. Kolika je zapremina (volumen) V nastalog obrtnog tijela?

555. Zadane su stranice b i c trougla (trokuta) i ugao (kut) između njih α. Trougao rotira oko ose koja prolazi kroz vrh ugla α, a sa stranicama b i c zatvara jednake uglove. Kolika je zapremina (volumen) V obrtnog tijela?

556. U jednakokrakom trapezu je dijagonala normalna na krak b. Krak zatvara sa dužom osnovicom trapeza ugao (kut) α. Kolika je površina P tijela nastalog rotacijom trapeza oko duže osnovice?

557. U uspravan konus je upisana lopta. Kolika je njezina zapremina (volumen) V ako izvodnica s konusa zatvara sa njegovom bazom ugao (kut) α?

558. Tupougli trougao (trokut) čiji su oštri uglovi (šiljasti kutovi) α i β, a najkraća visina h, rotira oko stranice suprotne uglu β. Kolika je površina nastalog obrtnog tijela?

559. Radijus baze uspravnog konusa je R, a ugao pri vrhu osnog presjeka α. Kolika je zapremina (volumen) pravilne trostrane piramide opisane oko konusa?

560. U uspravan zarubljen konus je upisana lopta radijusa r. Izvodnica konusa zatvara sa njegovom bazom ugao (kut) α. Koliki je omotač (plašt) zarubljenog konusa?

561. Oko lopte radijusa r je opisan uspravan zarubljeni konus (krnji stožac) čija izvodnica zatvara sa bazom ugao (kut) α. Kolika je površina P zarubljenog konusa?

562. U sferu radijusa R, upisan je uspravan zarubljeni konus (krnji stožac). Osnovice trapeza koji se javlja kao osni presjek konusa vide se iz centra sfere pod uglovima (kutovima) α i β. Koliki je omotač (plašt) M zarubljenog konusa?

UPUTE
I
REZULTATI

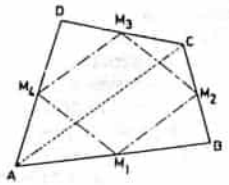
1. Tačka, prava i ravan (pravac i ravnina)

1. a) Tačkama A, B, C i D koje ne leže u jednoj ravni određene su četiri ravni, i to: ABC, ABD, ACD i BCD b) 10.

2. a) Tri prave a, b, c određuju tri ravni, i to: ab, ac i bc.
b) Četiri prave a, b, c, d određuju šest pravih, i to: ab, ac, ad, bc, bd i cd. c) Deset d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. a) Ravni α, β, γ određuju tri prave, i to: $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ i $\beta\gamma$. b) Šest pravih, i to: $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$ i $\gamma\delta$
c) Deset d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

4. Neka su M_1, M_2, M_3 i M_4 (sl. 39) redom sredine stranica AB, BC, CD i DA. Tačke A, B, D određuju u prostoru trougao (trokut) u kome je, iz poznatih planimetrijskih razloga, $M_1M_4 \parallel BD$ i $M_1M_4 = \frac{1}{2}BD$. U $\triangle BCD$ je $M_2M_3 \parallel BD$ i $M_2M_3 = \frac{1}{2}BD$. Prema tome je $M_1M_4 \parallel M_2M_3$ i $M_1M_4 = M_2M_3$, a $M_1M_2M_3M_4$ paralelogram.



Sl. 39

Napomena: *Konstruktivni zadaci u prostoru.*

Znamo da se konstruktivni zadaci u planimetriji izvode u jednoj ravni (ravnini) pomoću ravnala i šestara.

Stereometrijske figure se nalaze u trodimenzionalnom prostoru, a crtanje u prostoru nije moguće. Osim toga, na stereometrijskim figurama se javlja, uz tačke i linije, nov elemenat, ravan, čija konstrukcija nije jednostavna kao što je konstrukcija prave (pravca) u ravni.

Zbog toga treba tačno definisati šta znači izvršiti konstrukciju neke stereometrijske figure, a naročito, šta znači konstruisati ravan. Pri rješavanju konstruktivnih stereometrijskih zadataka pretpostavljaćemo:

1) da se ravan može konstruisati ako su zadani elementi koji je u prostoru određuju; to znači da ćemo smatrati da ravan možemo konstruisati, te da je i konstruisana u slučaju:

a) ako su poznate njezine tri nekolinearne tačke,

b) ako je zadana prava i tačka van nje,

c) ako su zadane dvije prave koje se sijeku ili

d) ako su poznate dvije paralelne prave koje određuju ravan;

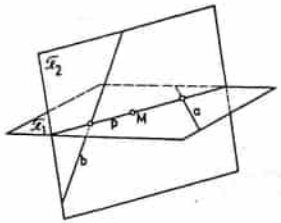
2) da je određena linija presjeka (presječnica) dviju ravni čim su zadane ili određene dvije neparalelne ravni;

3) da je u ravni, koja je određena na jedan od navedenih načina, uvijek moguće izvršiti konstrukciju figura običnim planimetrijskim metodama.

Izvršiti neku stereometrijsku konstrukciju znači svesti tu konstrukciju na konačan broj navedenih osnovnih konstrukcija.

Pri izvođenju stereometrijskih konstrukcija predstavljaćemo figure u kosoj projekciji da bi se dobila potrebna očiglednost figure koja se konstrukcijom traži i pronalazi.

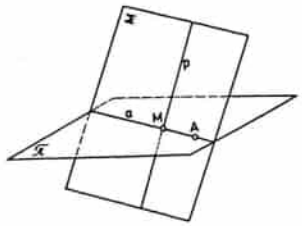
5. Na ovom zadatku pokazaćemo kako se rješava stereometrijski konstruktivni zadatak imajući u vidu prethodnu napomenu. — Prema zadanim podacima u zadatku pretpostavljamo da su u prostoru zadani elementi: tačka M i dvije mimoilazne prave a i b. Tačka M leži van svake od tih pravih (pravaca) pa, prema tome, sa pravom a potpuno određuje ravan, nazovimo je π_1 (sl. 40), a sa pravom b određuje ravan π_2. No, čim su određene ravni π_1 i π_2, smatramo da je određena i njihova presječna linija (presječnica) p. Prava p je upravo tražena prava, jer zadovoljava sve uslove koji su postavljeni u zadatku: 1) prolazi kroz tačku M, 2) presijeca pravu a, jer je s njom u istoj ravni π_1 i 3) presijeca pravu b jer je s njom u istoj ravni π_2. Ako je $a \parallel p$, a to je slučaj kad je ravan π_1, koju određuje tačka M i prava a, paralelna sa pravom b, onda zadatak nema rješenja. Slično je i u slučaju ako je prava $b \parallel p$.



Sl. 40

6. Odaberimo u zadanoj ravni π proizvoljnu tačku A (sl. 41) i položimo ravan Σ kroz tačku A i pravu p. Ravan Σ presijeca se sa ravni π u pravoj a. Tačka M u kojoj se presijecaju prave a i p je tražena tačka.

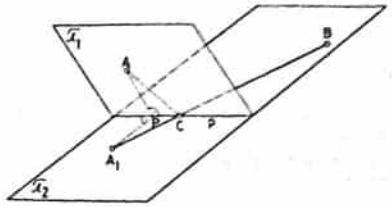
7. Uzmimo tri mimoilazne prave a, b i c. Na bilo kojoj od njih, npr. na pravoj a, odaberimo proizvoljnu tačku A. Ta tačka i jedna od preostalih pravih, npr. prava b, određuju ravan koja presijeca treću pravu c u nekoj tački C. Prava AC je jedno od rješenja, a ima ih beskonačno mnogo. (zašto?)



Sl. 41

8. Tačka A i prava p određuju ravan (ravninu) π u kojoj se može, na poznati planimetrijski način, konstruisati jednakostraničan trougao ABC čija tjemena (vrhovi) B i C leže na pravoj p.

9. Tačka A i prava p određuju ravan π_1 (sl. 42), a tačka B i prava p ravan π_2. Te dvije ravni se sijeku u datoj pravoj p. Iz jedne od



Sl. 42

zadanih tačaka, npr. iz tačke A, spustimo normalu $AP \perp p$ a u ravni π_2, kroz tačku P, normalu $A_1P \perp p$, tako da bude $AP = A_1P$. Prava A_1B presijeca pravu p u traženoj tački C. (zašto?)

10. Pretpostavimo da je prava a paralelna sa pravom b koja leži u ravni π_1 (nacrtajte sliku!). Treba dokazati da je prava a paralelna i sa ravni π_1. — Prave a i b određuju ravan π_2 koja se presijeca sa ravni π_1 u pravoj b. Kad prava a ne bi bila paralelna sa ravni π_1, ona bi je probadala (prodirala) u nekoj tački. Tada bi prava a presijecala i pravu b u toj istoj tački, što je nemoguće, jer protivrječi pretpostavci da su prave a i b paralelne.

11. Iz pretpostavke da je $p \parallel r$ i $q \parallel r$ treba dokazati da je i $p \parallel q$. — Pravom p i proizvoljnom tačkom Q prave q je određena ravan π_1 (nacrtajte sliku!), a pravom r i tačkom Q je određena ravan π_2. Ravan π_2 je svakako paralelna s pravom p (zašto?), a kako ravan π_1 prolazi kroz pravu p, presječna linija (presječnica) ravni π_1 i π_2 paralelna je s pravama p i r. Međutim, prava q je jedina prava koja prolazi kroz tačku Q paralelno sa pravom r pa slijedi da je i $p \parallel q$.

12. Ako je prava p paralelna s ravni π, onda u toj ravni postoji prava $a \parallel p$. Međutim je $p \parallel q$, pa je i $q \parallel a$.

13. Neka je ravan $\pi_1 \parallel \pi_3$ i ravan $\pi_2 \parallel \pi_3$; treba dokazati da je i $\pi_1 \parallel \pi_2$. — Pretpostavimo da ravan π_1 nije paralelna sa π_2. Tada se one sijeku u nekoj pravoj. Odaberimo na toj pravoj proizvoljnu tačku. Kroz tu tačku bi prolazile dvije ravni π_1 i π_2 paralelno sa ravni π_3. To je nemoguće, jer kroz tačku izvan ravni možemo položiti samo jednu ravan paralelno s njom.

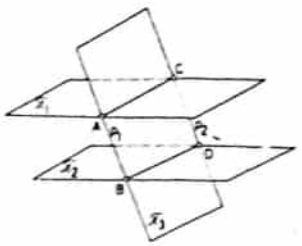
14. Ravni π_1 i π_2 su, po pretpostavci, paralelne sa pravom a, pa se u prvoj od njih može kroz tačku A povući prava $p' \parallel a$, a u ravni π_2 prava $p'' \parallel a$. Međutim, kroz jednu tačku (A) može se povući samo jedna prava paralelno sa zadanom pravom (a), pa slijedi da su prave p' i p'' identične (koincidentne) sa presječnom linijom (presječnicom) zadanih ravni, tj. $p \parallel a$.

15. Prije svega prave p i q leže u istoj ravni Σ. Te prave se ne mogu sjeći jer bi njihova zajednička tačka bila i zajednička tačka ravni π_1 i π_2, a ta ne postoji zbog pretpostavke da su ravni π_1 i π_2 paralelne.

16. Po pretpostavci su ravni π_1, π_2 i π_3 paralelne s pravom p, pa su i njihove presječne linije paralelne s pravom p, što znači da su paralelne i međusobno, prema ranije dokazanoj teoremi.

17. Prave a i b određuju neku ravan π_1 koja se presijeca sa ravni π u pravoj A_1B_1. Četvorougao (četverokut) AA_1B_1B ima dva para paralelnih stranica, pa je to paralelogram. Slijedi da je $AA_1 = BB_1$.

18. Neka su AB i CD (sl. 43) odsječci paralelnih pravih p_1 i p_2 između paralelnih ravni π_1 i π_2. Paralelne prave p_1 i p_2 određuju ravan π_3 koja presijeca paralelne ravni π_1 i π_2 u paralelnim pravama AC i BD. Prema tome, četvorougao (četverokut) $ABDC$ je paralelogram, pa je $AB = CD$.

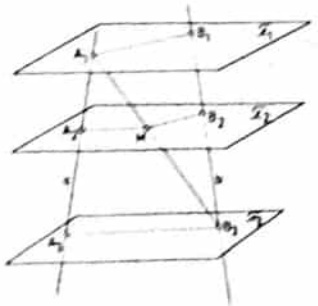


Sl. 43

19. Pretpostavimo da ravni π i Σ nisu paralelne. Tada se one sijeku u nekoj pravoj p. Ova prava mora da se presijeca bar sa jednom od pravih a i b (zašto) u nekoj tački M koja bi bila zajednička tačka te prave i ravni π. To je nemoguće jer su prave a i b, po pretpostavci, paralelne sa ravni π, pa ne mogu s njom imati zajedničke tačke. Prema tome, pretpostavka da ravni π i Σ nisu paralelne, nije istinita.

20. Neka su zadane dvije mimoilazne prave a i b. Na pravoj npr. a odaberimo proizvoljnu tačku A i povucimo kroz tu tačku pravu $b' \parallel b$. Prave a i b' određuju traženu ravan. — Da postoji samo jedna tražena ravan, proizlazi iz činjenice da dvije prave (a i b') koje se sijeku određuju jednu i samo jednu ravan; ta ravan je paralelna sa drugom pravom (b) jer sadrži jednu pravu (b') koja je paralelna sa pravom b.

21. Dvije mimoilazne prave a i b (sl. 44) presječene su trima paralelnim ravnima π_1, π_2 i π_3. Te ravni sijeku pravu a redom u tačkama A_1, A_2 i A_3 a pravu b u tačkama B_1, B_2, B_3. Spojmo tačke A_1 i B_3. Prava A_1B_3 prodire kroz ravan π_2 u tački M. Prave a i A_1B_3 određuju ravan koja presijeca ravni π_1 i π_3 u paralelama A_1M i A_3B_3. Isto tako prave b i A_1B_3 određuju ravan koja presijeca ravni π_1 i π_3 u paralelama MB_1 i B_3B_1; na osnovu poznatih planimetrijskih teorema slijedi: $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A_1M}{MB_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$.

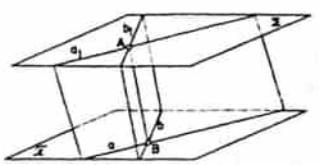


Sl. 44

22. Prava p prodire kroz ravan π_1; treba dokazati da prodire i kroz ravan π_2 ako je $\pi_1 \parallel \pi_2$. — Položimo kroz pravu p ravan π; ona će presjeći ravni π_1 i π_2 u paralelnim pravama p_1 i p_2. Budući da prava p prodire kroz ravan π_1, ona siječe pravu p_1, ali mora presjeći i p_2, jer je $p_1 \parallel p_2$. Prema tome, prava p ima i sa ravni π_2 zajedničku tačku, a to je i trebalo dokazati.

23. Tačka M i prava p određuju ravan π. U toj ravni treba kroz tačku M povući pravu $a \parallel p$. Zadatak ima samo jedno rješenje. (Objasnite!)

24. U zadanoj ravni π odaberimo proizvoljnu tačku B (sl. 45) i kroz nju u toj ravni položimo dvije proizvoljne prave a i b. Tačka A i prava a određuju ravan α. U ravni α povucimo kroz tačku A pravu $a_1 \parallel a$. Tačka A i prava b određuju ravan; u toj ravni povucimo kroz tačku A pravu $b_1 \parallel b$. Prave a_1 i b_1 određuju traženu ravan Σ. Zadatak ima samo jedno rješenje. Objasnite!



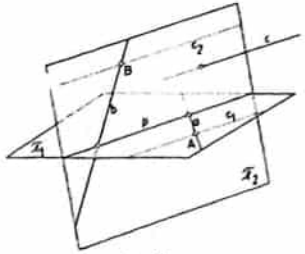
Sl. 45

25. Pretpostavimo da prava a nije paralelna sa pravom b. Kroz proizvoljnu tačku A prave a povucimo pravu $b_1 \parallel b$. Prave a i b_1 određuju traženu ravan. Zadatak ima jedno rješenje. — Ako su prave a i b paralelne, zadatak je neodređen, jer svaka ravan koja prolazi kroz pravu a biće paralelna sa pravom b.

26. Zadana je tača T i mimoilazne prave a i b. Tačka T i prava a određuju ravan π_1; u toj ravni povucimo pravu $a' \parallel a$; Tačka T i prava b određuju ravan π_2; u toj pravoj povucimo pravu $b' \parallel b$. Prave a' i b' određuju traženu ravan, (nacrtajte sliku!).

27. Svaka ravan Σ koja je paralelna sa ravni π siječe zadane prave u tačkama A i B koje određuju traženu pravu AB. Kako ima beskonačno mnogo ravni Σ, i pravih AB također ima beskonačno mnogo.

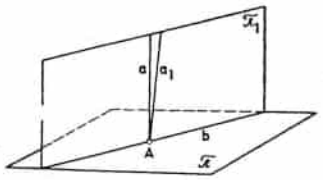
28. Neka su zadane mimoilazne prave a i b i treća prava c (sl. 46) Treba odrediti pravu p koja će sjeći prave a i b a sa c će biti paralelna. Kroz proizvoljnu tačku A prave a povucimo pravu $c_1 \parallel c$. Prave a i c_1 određuju ravan π_1 koja je paralelna sa pravom c. Kroz proizvoljnu tačku B prave b povucimo pravu $c_2 \parallel c$. Prave b i c_2 određuju ravan π_2 koja je paralelna sa c. Ravni π_1 i π_2 sijeku se u traženoj pravoj p.



Sl. 46

29. Zadane tri prave prodiru kroz neku ravan, koja je na njih normalna, u tačkama A, B i C. Kroz centar kružnice, opisane oko trougla ABC, prolazi tražena prava paralelno sa zadanim pravama.

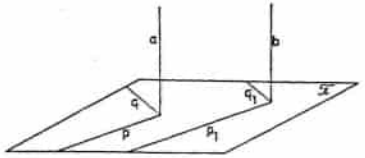
30. U tački A (sl. 47) ravni π podignimo normalu a. Treba dokazati da kroz istu tačku A ne možemo postaviti neku drugu normalu a_1. Pretpostavimo da je to moguće, tj. da se u tački A mogu položiti na ravan π dvije normale a i a_1. Tada će prave a i a_1 odrediti neku ravan π_1 koja će se presjeći sa ravni π u pravoj b. Prema svemu se vidi da bismo imali u ravni π_1 pravu b i u njezinoj tački A dvije normale (a i a_1) na tu pravu. To je nemoguće, (zašto?) pa slijedi da u tački A postoji samo jedna normala na ravan π.



Sl. 47

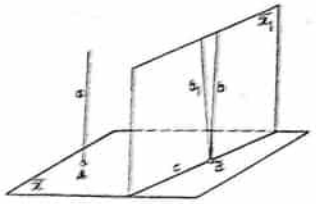
31. Dokaz je sličan onome iz prethodnog zadatka. Provedite ga!

32. Neka je $a \parallel b$ (sl. 48) i $a \perp \pi$; treba dokazati da je i $b \perp \pi$. — Podnožjem normale a povucimo proizvoljne prave p i q koje leže u ravni π, a prodorom prave b s ravni π povucimo prave $p_1 \parallel p$ i $q_1 \parallel q$. Tada je $\sphericalangle(a,p) = \sphericalangle(b,p_1)$ jer su to uglovi sa paralelnim kracima. Iz istog razloga je $\sphericalangle(a,q) = \sphericalangle(b,q_1)$. Međutim, uglovi između prave a i pravih p i q su pravi. Prema tome su pravi i uglovi koje zatvara prava b sa pravama p_1 i q_1 tj. $b \perp \pi$.



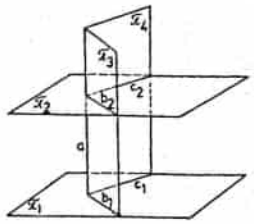
Sl. 48

33. Ako su dvije prave (pravca) normalne na istu ravan (ravninu), onda su one paralelne. — Dokaz: neka su prave $a \perp \pi$ i $b \perp \pi$ (sl. 49). Treba dokazati da je $a \parallel b$. Pretpostavimo da prave a i b nisu paralelne. Onda je moguće kroz tačku B povući pravu b_1 koja će biti paralelna sa a. Prave b i b_1 određuju tada neku ravan π_1 koja se siječe sa ravni π u nekoj pravoj c. Pošto je, prema teoremi, dokazanoj u prethodnom zadatku, i $b_1 \perp \pi$, to je $\sphericalangle(b_1, c)$ prav, a prema uslovu je i $\sphericalangle(b, c)$ prav. Na taj način postoje u ravni π_1 na pravoj c iz iste tačke B dvije normale b i b_1, što je nemoguće. Prema tome naša pretpostavka nije tačna, pa su prave a i b paralelne.



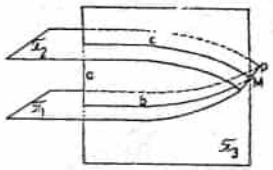
Sl. 49

34. Ravan $\pi_1 \parallel \pi_2$ (sl. 50) i $a \perp \pi_1$; treba dokazati da je i $a \perp \pi_2$. Kroz pravu a položimo dvije proizvoljne ravni π_3 i π_4 od kojih prva siječe zadane ravni π_1 i π_2 u paralelnim pravama b_1 i b_2 a druga (π_4) u paralelnim pravama c_1 i c_2. Prema uslovu je prava a normalna na prave b_1 i c_1 pa, prema tome, mora biti normalna i na prave b_2 i c_2 koje su s njima paralelne. Stoga je i normalna i na ravan π_2 u kojoj leže prave b_2 i c_2.



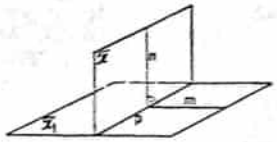
Sl. 50

35. Ako su dvije ravni normalne na istu pravu, onda su one paralelne. — Pretpostavimo suprotno, da se ravni π_1 i π_2 (sl. 51) koje su normalne na pravu a, sijeku u nekoj pravoj p. Odaberimo na toj pravoj proizvoljnu tačku M i položimo kroz tu tačku i pravu a ravan π_3. One će se sjeći sa ravnima π_1 i π_2 u pravama b i c. Pošto je $a \perp \pi_1$, $\sphericalangle(a,b)$ je prav. Iz istog razloga je i $\sphericalangle(a,c)$ prav. Prema tome, imamo na pravoj a u ravni π_3 dvije normale b i c koje prolaze kroz istu tačku M, što je nemoguće. Prema tome, pretpostavka je netačna, pa je $\pi_1 \parallel \pi_2$.



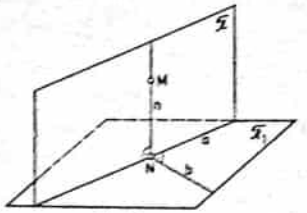
Sl. 51

36. Po pretpostavci je $n \perp \pi_1$ (sl. 52); treba dokazati da je i $\pi \perp \pi_1$. — Neka je p prava u kojoj se sijeku ravni π i π_1. U ravni π_1 povucimo pravu $m \perp n$. Tada je ugao između pravih m i n ugao diedra koji obrazuju ravni π i π_1. Pošto je prava n, po pretpostavci, normalna na π_1, onda je $n \perp m$. Prema tome je ugao između pravih m i n prav, pa je i diedar prav, tj. ravan $\pi \perp \pi_1$.



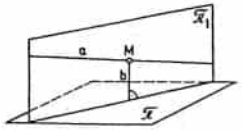
Sl. 52

37. Uzmimo da se ravni (ravnine) π i π_1 (sl. 53) sijeku u nekoj pravoj (pravcu) a. Spustimo iz tačke M normalu n na pravu a. Treba dokazati da je prava n istovremeno normala, spuštena iz tačke M na ravan π_1. Povucimo u ravni π_1 kroz presječnu tačku N pravih a i n pravu $b \perp a$. Prave b i n određuju nagibni ugao diedra ($\pi a \pi_1$). Međutim, ravni π i π_1 su normalne, pa je $n \perp b$. Prava n je, prema tome, normalna na pravu a i na pravu b koja leži u ravni π_1. Ona je dakle, tražena normala, spuštena iz tačke M na ravan π_1.



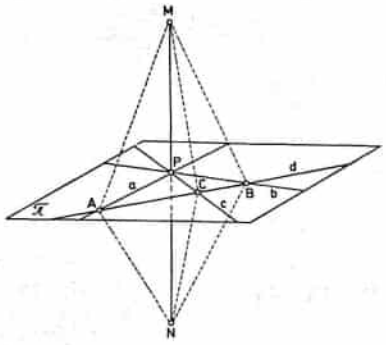
Sl. 53

38. Odaberimo na pravoj a (sl. 54) proizvoljnu tačku M i spustimo iz nje normalu b na ravan π. Ravan π_1 koju određuju prave a i b je tražena ravan (zašto?). Ta ravan je jednoznačno određena, jer se iz tačke M može spustiti samo jedna normala na ravan π.



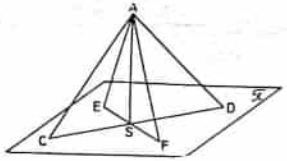
Sl. 54

39. Na pravoj p odaberimo dvije tačke M i N tako da je $MP=PN$ (sl. 55). U ravni π povucimo pravu c kroz tačku P i pravu d koja presijeca prave a, b, c redom u tačkama A, B i C; spojmo tačke M i N sa tačkama A, B i C. Kako je prava a simetrala duži MN, to je $AM=AN$. Analogno je $BM=BN$, pa je $\triangle ABM\cong\triangle ABN$. Zarotirajmo $\triangle ABM$ oko njegove stranice AB dok se ne poklopi sa podudarnim $\triangle ABN$. Pri tome će se poklopiti CM sa CN, pa je očito da je $CM=CN$, tj $\triangle MNC$ je jednakokraki. Kako je CP njegova visina na osnovicu MN a CP je dio prave c, to je $p\perp c$, što je i trebalo dokazati.

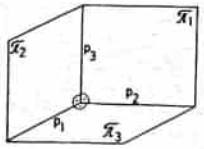


Sl. 55

40. $\triangle ACD$ (sl. 56) je jednakokraki i $AS\perp CD$. Analogno je $AS\perp EF$. Prava AS je normalna na dvije prave ravni π pa je normalna i na samu ravan.



Sl. 56



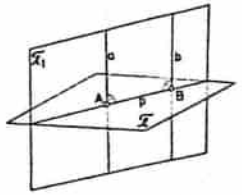
Sl. 57

41. Prava p prodire kroz ravan π u tački P. Povucimo kroz tu tačku dvije prave $a_1\parallel a$ i $b_1\parallel b$. Prema ranije dokazanoj teoremi je $p\perp a_1$ i $p\perp b_1$, pa je i $p\perp\pi$.

42. Pretpostavimo da su prave p_1, p_2 i p_3 (sl. 57) uzajamno normalne. Po dvije od njih određuju ravan, i to: p_2 i p_3 određuju ravan π_1, p_3 i p_1 ravan π_2, a p_1 i p_2 određuju ravan π_3; treba dokazati da je $p_1\perp\pi_1$, $p_2\perp\pi_2$ i $p_3\perp\pi_3$. Zaista prava p_1 je normalna na dvije prave (p_2 i p_3) ravni π_1 pa je, prema poznatoj teoremi, normalna i na ravan koju te prave određuju, tj. $p_1\perp\pi_1$. Analogno se dokazuje ostali dio teoreme.

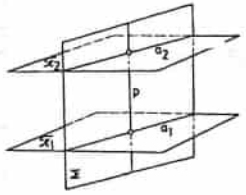
43. Ravan koja prolazi kroz tačku T normalno na a.

44. Po pretpostavci je $a\perp\pi$ i $b\perp\pi$. Prave a i b određuju ravan π_1 (sl. 58) koja se siječe s ravni π u pravoj p pa je i $a\perp p$ te $b\perp p$. Neka prava a prodire kroz ravan π u tački A a prava b u tački B. Kada prave a i b ne bi bile paralelne, one bi se u ravni π_1 sjekle u nekoj tački C, pa bi $\triangle ABC$ bio trougao sa dva prava ugla (kod A i kod B), što je nemoguće itd.

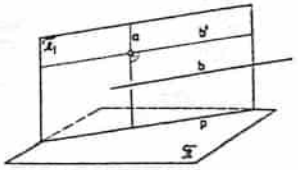


Sl. 58

45. Kroz pravu p položimo proizvoljnu ravan Σ (sl. 59). Ona će sjeći ravan π_1 u pravoj a_1, a ravan π_2 u pravoj a_2 te je, svakako, $a_1\parallel a_2$. Prava p je normalna na a_1 pa je, prema tome, normalna i na a_2. Što vrijedi za ravan Σ vrijediće i za sve ostale ravni koje prolaze kroz pravu p, pa zaključujemo da je prava p normalna na svakoj pravoj ravni π_2, tj. $p\perp\pi_2$.

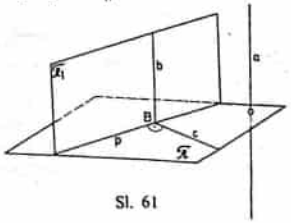


Sl. 59



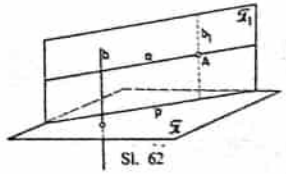
Sl. 60

46. Kroz pravu a položimo ravan $\pi_1\parallel b$ (sl. 60). Ravni π i π_1 sijeku se u nekoj pravoj p. Kako je, po pretpostavci, $a\perp p$, biće i $b\parallel p$, pa je i $b\parallel\pi$.



Sl. 61

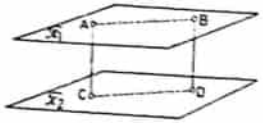
47. Položimo u prostoru pravu $b\parallel a$ (sl. 61) i kroz tu pravu ravan π_1. Tada je $\pi_1\parallel a$ (zašto?). Treba dokazati da je $\pi_1\perp\pi$ ako je i $a\perp\pi$. — Ravni π i π_1 se sijeku u pravoj p a b i p u tački B. Položimo u ravni π kroz tačku B pravu $c\perp p$. Tada je i $b\perp c$ (zašto?). Međutim, ugao između pravih b i c je nagibni ugao diedra $(\pi p\pi_1)$ itd.



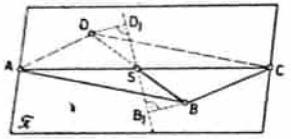
Sl. 62

48. Kroz proizvoljnu tačku A prave a povucimo pravu $b_1\parallel b$ (sl. 62). Prave a i b_1 određuju neku ravan π_1 koja se siječe s ravni π u pravoj p. Kako je $\pi\perp b$, to je i $p\perp b$; međutim $b_1\parallel b$, pa je i $b_1\perp p$. Budući da je $a\perp b_1$, to je $a\parallel p$, pa je i $a\parallel\pi$.

49. Iz proizvoljnih tačaka A i B ravni π_1 spustimo normale AC i BD na ravan π_2 (sl. 63). Kako je $ACDB$ pravougaonik (pravokutnik) (zašto?), to je $AC = BD$.



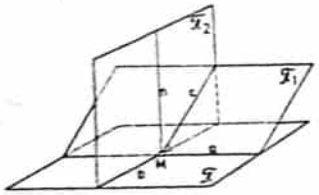
Sl. 63



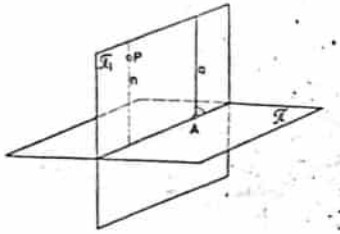
Sl. 64

50. Kroz dijagonalu AC paralelograma $ABCD$ (sl. 64) položimo ravan π i spustimo normale BB_1 i DD_1 na tu ravan. Tada je $\triangle BB_1S \cong \triangle DD_1S$ (zašto?), pa je $BB_1 = DD_1$.

51. Kroz tačku M u ravni π položimo dvije proizvoljne međusobno normalne prave a i b (sl. 65). Kroz pravu a položimo proizvoljnu ravan π_1 i u toj ravni povucimo kroz tačku M pravu $c \perp a$. Prave b i c određuju ravan π_2. Podignimo u tački M u toj ravni pravu $n \perp b$. Prava n je tražena prava.



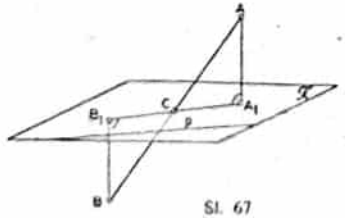
Sl. 65



Sl. 66

52. U proizvoljnoj tački A ravni π (sl. 66) treba podići pravu $a \perp \pi$. Prava a i tačka P određuju ravan π_1 u kojoj treba povući traženu normalu $n \perp a$. Prava n je jednoznačno određena ma gdje odabrali tačku A, pa slijedi da se iz jedne tačke van neke ravni može spustiti samo jedna normala na tu ravan.

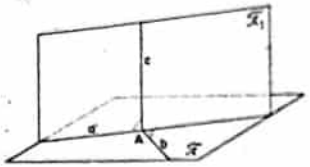
53. Traženu ravan π (sl. 67) određuju zadana prava p i tačka C koja raspolavlja duž (dužinu) AB. Dokaz: iz tačaka A i B spustimo normale AA_1 i BB_1 na ravan π. Tada je $\triangle AA_1C \cong \triangle BB_1C$ (zašto?), pa je $AA_1 = BB_1$.



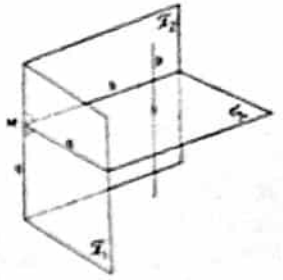
Sl. 67

54. Na pravoj a (sl. 68) odaberimo proizvoljnu tačku A i u ravni π povucimo pravu $b \perp a$. U tački A podignimo normalu c na a. Ravan π_1 koja je određena pravama a i c je tražena ravan (zašto?).

55. Tačka M i prava p određuju ravan π u kojoj se može, na poznati planimetrijski način, konstruisati: a) prava $n \perp p$ i b) prava $q \parallel p$.



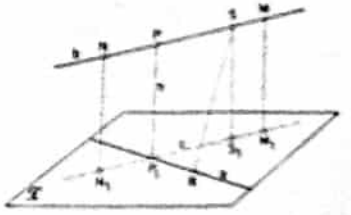
Sl. 68



Sl. 69

56. Kroz tačku M treba položiti dvije proizvoljne ravni π_1 i π_2 (sl. 69) paralelno s pravom p. Na njihovu presječnu liniju q položiti u ravni π_1 pravu $a \perp q$, a u ravni π_2 pravu $b \perp q$. Prave a i b određuju traženu ravan π. Ta ravan je jednoznačno određena i normalna na pravu q a, prema tome, i na pravu p. Posljedica: kroz svaku tačku može se položiti samo jedna ravan (ravnina) normalno na zadanu pravu.

57. Kroz zadanu pravu a položimo dvije proizvoljne ravni π_1 i π_2 (nacrtajte sliku!). U svakoj od ovih ravni podignimo normalu na pravu a u tački M (u ravni π_1 normalu b a u ravni π_2 normalu c). Prave b i c određuju traženu ravan π.

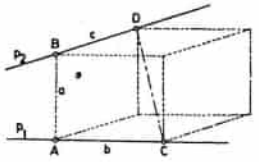


Sl. 70

58. Kroz pravu a (sl. 70) položimo ravan $\pi \parallel b$. Na pravoj b odaberimo dvije proizvoljne tačke M i N i spustimo iz njih normale MM_1 i NN_1 na ravan π. Spojmo tačke M_1 i N_1 u ravni π pravom c. Prave a i c se sijeku u nekoj tački P_1. U toj tački podignimo normalu n na ravan π. Prava n je tražena prava. Dokažite sami da normala n sijeće pravu b u nekoj tački P i da je normalna na prave a i b. Dokazaćemo, nadalje, da je segment PP_1 najmanji od svih segmenata koji nastaju spajanjem tačaka na pravoj a sa tačkama na pravoj b. — Odaberimo na pravoj a proizvoljnu tačku R i spojmo je pravom linijom sa proizvoljnom tačkom S na pravoj b. Spustimo normalu SS_1 na ravan π. Tada je $RS > SS_1$ (zašto?), a kako je $SS_1 = PP_1$, to je i $RS > PP_1$.

59. Zadane duži a, b i c (sl. 71) su dimenzije pravouglog (pravokutnog) paralelepipeda u kome se traži prostorna dijagonala $CD = d$. Poznato je da je $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (dokažite to!).

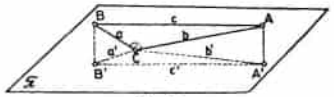
60. Na osnovu Pitagorine teoreme je $a = \sqrt{160}$ cm (sl. 72); $b = \sqrt{416}$ cm; projekcija c' hipotenuze jednaka je samoj hipotenuzi C i iznosi 24 cm.



Sl. 71

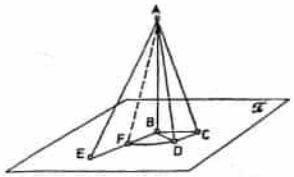
61. Ako je x udaljenost između ravni, onda je $\sqrt{169-x^2} : \sqrt{225-x^2} = 5:9$, a odavde $x = 12$ cm.

62. a) Neka je $AB \perp \pi$ (sl. 73), a $BC = BD$ projekcije kosih duži AC i AD na ravan π. Kako je $\triangle ABC \cong ABD$ (zašto?), to je $AC = AD$;

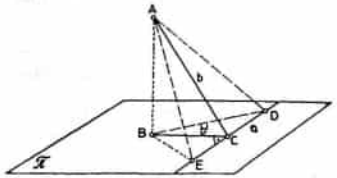


Sl. 72

b) Neka je $BC < BE$; zaokrenimo $\triangle ABC$ oko katete AB dok ne padne u ravan ABE; tačka C će pasti u položaj tačke F jer je $BC = BF < BE$; u $\triangle AFB$ je $\sphericalangle AFB$ oštar a $\sphericalangle AFE$, kao uporedni, tup, pa je, iz poznatih planimetrijskih razloga, $AE > AF = AC$.



Sl. 73

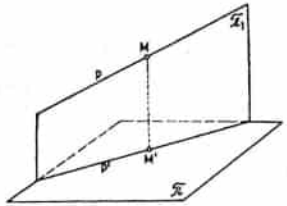


Sl. 74

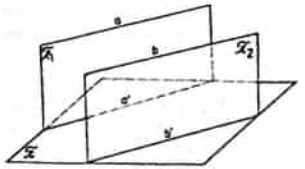
63. Iz tačke A van ravni π (sl. 74) povučena je normala AB i kosa prava AC na tu ravan. Prava DE koja leži u ravni π normalna je na projekciju BC kose duži AC. Treba dokazati da je i $DE \perp AC$. — Odaberimo tačke D i E tako da bude $DC = CE$. Tada je $\triangle DBE$ jednakokraki (zašto?) pa je $BD = BE$. Kako je $\triangle ABE \cong \triangle ABD$ (zašto?), to je $AD = AE$; $\triangle ADE$ je jednakokraki (jednakokračan); AC je njegova visina na osnovicu DE, pa je $AC \perp DE$.

64. Zadana je prava p i ravan π (sl. 75). Prava ne leži u toj ravni i nije na nju normalna. Kroz pravu p položimo ravan $\pi_1 \perp \pi$. Te dvije ravni se sijeku u nekoj pravoj p'. Ako spustimo normalu MM' iz ma koje tačke prave, ona će ležati u ravni π_1 pa će i projekcija M' tačke M ležati na pravoj p'. Prema tome, svaka tačka M prave p se projicira u neku tačku M' prave p', pa je prava p' projekcija

prave p na ravan π. Ako je prava $p \perp \pi$, ona se projicira u tačku (u svoj prodor sa ravni).



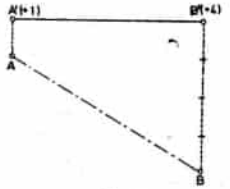
Sl. 75



Sl. 76

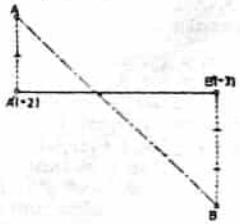
65. Paralelne prave a i b projiciramo na ravan π (sl. 76). Položimo kroz prave a i b normalne ravni (projektujuće ravni) π_1 i π_2 na ravan π. Te dvije ravni sijeku se sa ravni π u pravama a' i b' koje su projekcije pravih a i b na ravan π; $a' \parallel b'$ jer su te dvije prave presječne linije ravni π sa paralelnim ravnima π_1 i π_2.

66. (Sl. 77)



Sl. 77

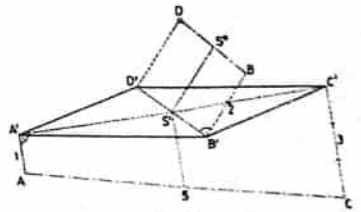
67. (Sl. 78)



Sl. 78

68. a) $AB = 13$ cm b) $AB = 10$ cm.

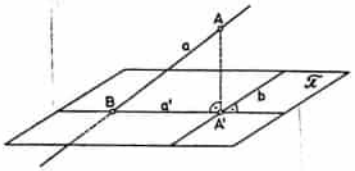
69. Treba konstruisati prave veličine pojedinih stranica pomoću njihovih projekcija i zadanih kota, pa iza toga konstruisati i sam trougao (trokut).



Sl. 79

70. Odredite najprije pravu veličinu dijagonale AC (sl. 79) i kotu SS' njezine sredine; zatim potražite pravu veličinu dijagonale BD pomoću kota BB' i $S'S'' = S'S$ itd.

71. Po pretpostavci je $a' \perp b$ (sl. 80); treba dokazati da je i $a \perp b$. — Kako je $AA' \perp \pi$, to je $AA' \perp a'$ i $AA' \perp b$. Budući da je $b \perp a'$ i $b \perp AA'$, prava b normalna je na ravan koju obrazuje prava a i njezina projekcija a'. Prema tome je $b \perp a$ jer i prava a leži u toj ravni.

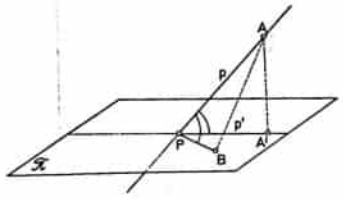


Sl. 80

72. Ako je prava (pravac) a normalna na pravu b koja leži u ravni (ravnini) π, onda je i projekcija a' prave a u toj ravni normalna na b. — Dokaz provedite sami prema slici iz prethodnog zadatka. Pođite od pretpostavke da je $a \perp b$, razmotrite projekciju a' i ravan koju obrazuju prava a i njezina projekcija a' itd.

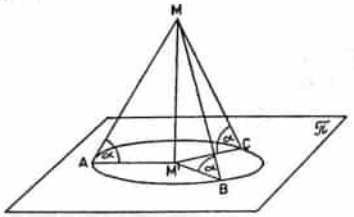
73. Za dvije mimoilazne prave a i b u prostoru, iako se ne sijeku, uzimamo da zatvaraju ugao. Taj ugao dobijemo tako da kroz bilo koju tačku prostora povučemo paralele $a_1 \parallel a$ i $b_1 \parallel b$. Ugao (kut) između pravih (pravaca) a_1 i b_1 se uzima za ugao između pravih a i b. Ako su prave a_1 i b_1 međusobno normalne, onda kažemo da su normalne i mimoilazne prave.

74. Prava p (sl. 81) prodire kroz ravan π u tački P; p' je projekcija prave p na ravan π. Odaberimo na pravoj p proizvoljnu tačku A i projicirajmo je u tačku A' ravni π. Odaberimo u ravni π neku duž $PB = PA'$ i razmotrimo trouglove (trokute) $AA'P$ i ABP. To su trouglovi sa dvije jednake stranice (koje?), za treću stranicu važi relacija $AB > AA'$. Prema poznatoj planimetrijskoj teoremi je i $\sphericalangle APB > \sphericalangle APA'$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 81

75. Na liniji presjeka (presječnici) p odaberimo proizvoljnu tačku P i razmotrimo pravougle trouglove (vidite sliku u tekstu zadatka!) $MM'N$ i $MM'P$. Lako ćete dokazati da je $M'N < MP$ i, prema tome, $\sphericalangle MNM' > \sphericalangle MPM'$.

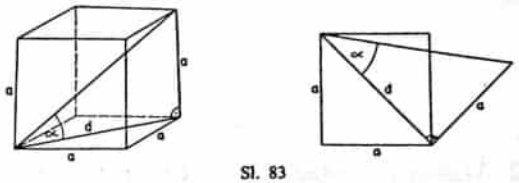


Sl. 82

76. M' je projekcija tačke M na ravan π (sl. 82). Po pretpostavci je $\sphericalangle MAM' = \sphericalangle MBM' = \sphericalangle MCM'$. Prema tome su pravougli trouglovi $AM'M$, $BM'M$ i $CM'M$ podudarni (sukladni) pa je $AM' = BM' = CM'$, tj. traženo geometrijsko mjesto tačaka je kružnica u ravni π čiji je centar u projekciji M' tačke M na ravan π.

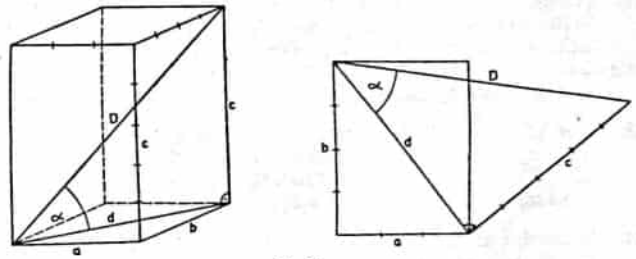
77. Kružnica čiji je centar projekcija M' tačke M na ravan π.

78. (Sl. 83)



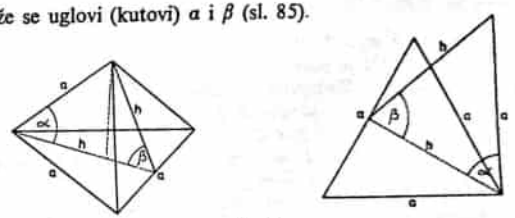
Sl. 83

79. Traži se ugao (kut) α (sl. 84).



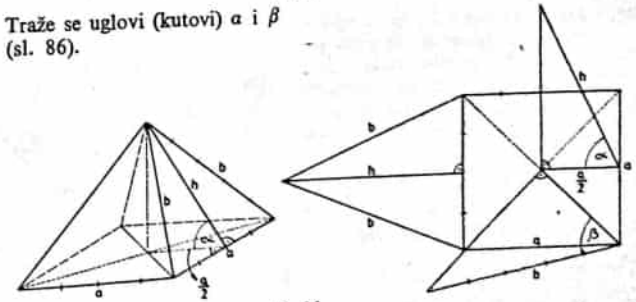
Sl. 84

80. Traže se uglovi (kutovi) α i β (sl. 85).



Sl. 85

81. Traže se uglovi (kutovi) α i β (sl. 86).

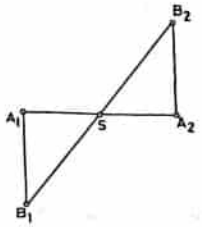


Sl. 86

2. Translacija, rotacija i simetrija u prostoru

82. (Vidite sliku iz uvodnog dijela ovog paragrafa!) Kako je $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ i $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, četvorouglovi ABB_1A_1, ACC_1A_1 itd. su paralelogrami. Očito je $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC, \ldots$; isto tako je $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ itd. a ravni u kojima leže su paralelne.

83. Duž (dužina) A_1B_1 je centralno simetrična sa duži A_2B_2 s obzirom na centar simetrije S (sl. 87); $\triangle A_1B_1S \cong A_2B_2S$ (zašto?), pa je $\sphericalangle SA_1B_1 = \sphericalangle SA_2B_2$ tj. $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

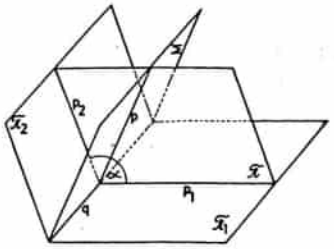


Sl. 87

84. Simetralne ravni bilo kojih dviju od duži BC, CA ili AB sijeku se u pravoj koja je traženo geometrijsko mjesto tačaka.

85. Presijecimo strane π_1 i π_2 diedra (sl. 88) ravninom (ravni) π koja je normalna na presječnu liniju (presječnicu) q. Dobivene presječne linije p_1 i p_2 zatvaraju ugao (kut) diedra α. Njegova simetrala p je geometrijsko mjesto tačaka podjednako udaljenih od pravih p_1 i p_2. Ako prava p izvrši translaciju klizeći po pravoj q, ona će opisati ravan Σ koja je traženo geometrijsko mjesto tačaka. Ravan Σ se zove simetralna ravan diedra $(\pi_1\, q\, \pi_2)$.

86. Dvije prave a i b koje se sijeku, određuju ravan π. Traženo geometrijsko mjesto tačaka jesu dvije ravni koje su normalne na ravan π, a sijeku je u simetralama uglova koje zatvaraju prave a i b.



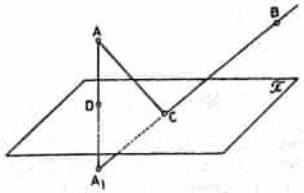
Sl. 88

87. **a), b)** i **c)** Presječna tačka prostornih dijagonala. **d)** Ova figura nije centralno simetrična.

88. **a)** 7 **b)** 3 **c)** 3 **d)** 4.

89. **a)** 9 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 4.

90. Sve tačke koje su podjednako udaljene od tačaka P i Q leže na simetralnoj ravni Σ duži (dužine) PQ. Tražene tačke leže na presječnoj liniji (presječnici) ravni π i Σ. Ako je duž PQ normalna na ravan π, zadatak nema rješenja (zašto?).

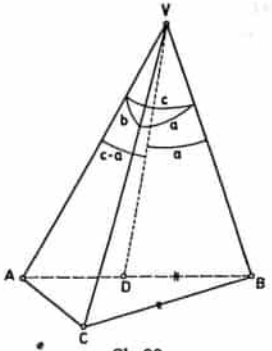


Sl. 89

91. Tački A (sl. 89) odredimo simetričnu tačku A_1 s obzirom na ravan π. Prava A_1B prodire kroz ravan π u traženoj tački C.

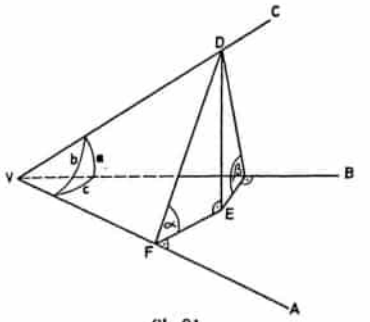
3. Rogalj, triedar

92. Neka je c najveća strana roglja $VABC$ (sl. 90). Tada je $c>a$ i $c>b$, pa je svakako $a<b+c$ i $b<c+a$. Treba dokazati da je i $c<a+b$. Prenesimo ugao a na stranu c tako da VB bude zajednički krak. Drugi krak ugla a će pasti negdje između ivica VA i VB u položaj VD. Na polupravama VC i VD odmjerimo jednake duži (dužine) $VC=VD$, kroz tačku D povucimo na strani c proizvoljnu pravu ADB i spojmo C sa A i B. Tada je $\triangle VBD\cong\triangle VBC$ (zašto?), pa je $BC=BD$. Kako je $AB=AD+DB=$ $=AD+BC$ i $AB<AC+BC$, to je $AD+$ $+BC<AC+BC$ ili $AD<AC$. Trouglovi VAD i VAC imaju po dvije jednake stranice (VA im je zajednička stranica a $VD=VC$). Treće stranice su nejednake. Kako naspram kraće stranice AD leži i manji ugao, to je $c-a<b$ ili $c<a+b$. Istinitost drugog dijela teoreme slijedi neposredno iz pretposljednje nejednakosti jer je $b>c-a$ i $a>c-b$.



Sl. 90

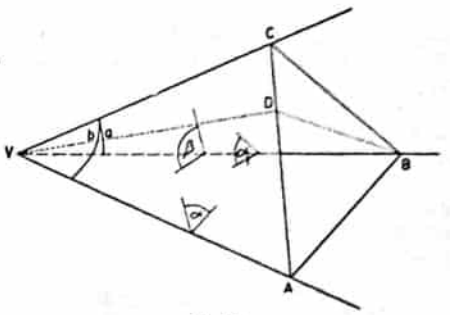
93. Na triedru $VABC$ (sl. 91) su, po pretpostavci, jednaki diedri sa ivicama VA i VB. Na ivici VC odaberimo proizvoljnu tačku D i spustimo iz nje normalu DE na stranu c. Kroz pravu DE položimo dvije ravni $DEF\perp VA$ i $DEG\perp VB$. Time dobivamo nagibne uglove α i β koji su, po pretpostavci, jednaki. Pravougli trouglovi DEF i DEG su podudarni (sukladni) (zašto?), pa je $DF=DG$. Slijedi da je i $\triangle VFD\cong\triangle VGD$, jer im je VD zajednička stranica, $DF=$ $=DG$ i $\sphericalangle DFV=\sphericalangle DGV=$ $=90°$. Prema tome je $a=b$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 91

94. Nasuprot jednakih strana triedra leže jednaki diedri. Dokaz provedite sami prema slici iz prethodnog zadatka.

95. U triedru $VABC$ pretpostavimo da je $\beta>\alpha$ (sl. 92). Treba dokazati da je $b>a$. Kroz ivicu VB položimo ravan VBD tako da sa ravni VBA obrazuje diedar čiji je nagibni ugao $\alpha_1=\alpha$. Tada je $\sphericalangle AVD=$

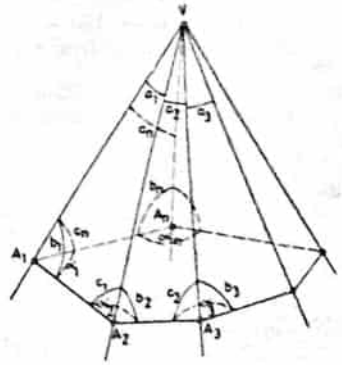


Sl. 92

$=\sphericalangle BVD$ (zašto?) i $\sphericalangle CVD+\sphericalangle BVD>\sphericalangle BVC$ (zašto?). Kako je $\sphericalangle BVD=\sphericalangle AVD$, slijedi da je $\sphericalangle CVD+\sphericalangle AVD>\sphericalangle BVC$ tj. $b>a$, što je i trebalo dokazati.

96. U svakom triedru naspram veće strane leži veći diedar. Dokaz provedite sami prema slici iz prethodnog zadatka.

97. Zadani n-tostrani rogalj $VA_1A_2A_3\ldots A_n$ (sl. 93) presijecimo ravninom (ravni) koja presijeca sve njegove ivice. Time dobivamo n-tougao $A_1A_2A_3\ldots A_n$ čije uglove označimo sa $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Svako tjeme (vrh) ovog poligona možemo smatrati tjemenom triedra koji obrazuju dvije susjedne strane roglja i poligon. U $\triangle VA_1A_2$ označili smo uglove (vidite sliku!) sa a_1, b_1, c_1; u $\triangle VA_2A_3$ imamo uglove a_2, b_2, c_2 itd; u $\triangle VA_nA_1$ biće uglovi a_n, b_n, c_n.



Sl. 93

Tada je

$$a_1<b_1+c_n$$
$$a_2<b_2+c_1$$
$$a_3<b_3+c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n<b_n+c_{n-1}.$$

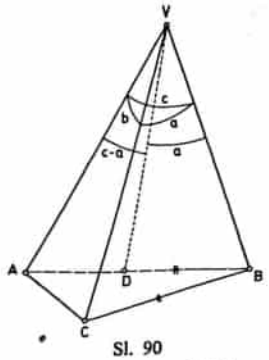
Odavde je

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<(b_1+c_n)+(b_2+c_1)+$$
$$+(b_3+c_2)+\cdots+(b_n+c_{n-1}).$$

Na lijevoj strani ove nejednakosti je suma uglova n-tougla, a ta iznosi $(n-2)180°$. Na desnoj strani nejednakosti je suma uglova

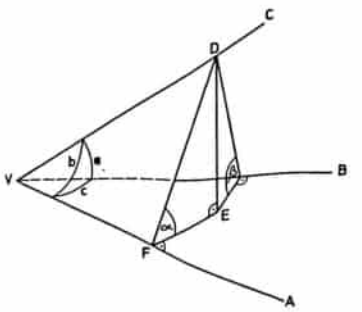
3. Rogalj, triedar

92. Neka je c najveća strana roglja $VABC$ (sl. 90). Tada je $c>a$ i $c>b$, pa je svakako $a<b+c$ i $b<c+a$. Treba dokazati da je i $c<a+b$. Prenesimo ugao a na stranu c tako da VB bude zajednički krak. Drugi krak ugla a će pasti negdje između ivica VA i VB u položaj VD. Na polupravama VC i VD odmjerimo jednake duži (dužine) $VC=VD$, kroz tačku D povucimo na strani c proizvoljnu pravu ADB i spojmo C sa A i B. Tada je $\triangle VBD\cong\triangle VBC$ (zašto?), pa je $BC=BD$. Kako je $AB=AD+DB=$ $=AD+BC$ i $AB<AC+BC$, to je $AD+$ $+BC<AC+BC$ ili $AD<AC$. Trouglovi VAD i VAC imaju po dvije jednake stranice (VA im je zajednička stranica a $VD=VC$). Treće stranice su nejednake. Kako naspram kraće stranice AD leži i manji ugao, to je $c-a<b$ ili $c<a+b$. Istinitost drugog dijela teoreme slijedi neposredno iz pretposljednje nejednakosti jer je $b>c-a$ i $a>c-b$.



Sl. 90

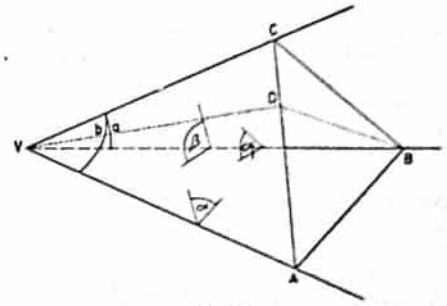
93. Na triedru $VABC$ (sl. 91) su, po pretpostavci, jednaki diedri sa ivicama VA i VB. Na ivici VC odaberimo proizvoljnu tačku D i spustimo iz nje normalu DE na stranu c. Kroz pravu DE položimo dvije ravni $DEF\perp VA$ i $DEG\perp VB$. Time dobivamo nagibne uglove α i β koji su, po pretpostavci, jednaki. Pravougli trouglovi DEF i DEG su podudarni (sukladni) (zašto?), pa je $DF=DG$. Slijedi da je i $\triangle VFD\cong\triangle VGD$, jer im je VD zajednička stranica, $DF=$ $=DG$ i $\sphericalangle DFV=\sphericalangle DGV=$ $=90°$. Prema tome je $a=b$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 91

94. Nasuprot jednakih strana triedra leže jednaki diedri. Dokaz provedite sami prema slici iz prethodnog zadatka.

95. U triedru $VABC$ pretpostavimo da je $\beta>a$ (sl. 92). Treba dokazati da je $b>a$. Kroz ivicu VB položimo ravan VBD tako da sa ravni VBA obrazuje diedar čiji je nagibni ugao $\alpha_1=a$. Tada je $\sphericalangle AVD=$

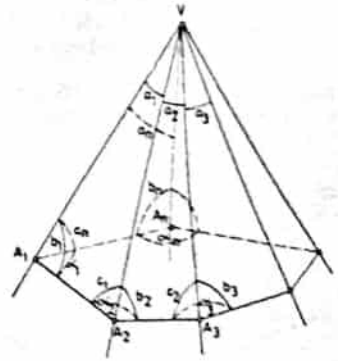


Sl. 92

$=\sphericalangle BVD$ (zašto?) i $\sphericalangle CVD+\sphericalangle BVD>\sphericalangle BVC$ (zašto?). Kako je $\sphericalangle BVD=\sphericalangle AVD$, slijedi da je $\sphericalangle CVD+\sphericalangle AVD>\sphericalangle BVC$ tj. $b>a$, što je i trebalo dokazati.

96. U svakom triedru naspram veće strane leži veći diedar. Dokaz provedite sami prema slici iz prethodnog zadatka.

97. Zadani n-tostrani rogalj $VA_1A_2A_3\ldots A_n$ (sl. 93) presijecimo ravninom (ravni) koja presijeca sve njegove ivice. Time dobivamo n-tougao $A_1A_2A_3\ldots A_n$ čije uglove označimo sa $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Svako tjeme (vrh) ovog poligona možemo smatrati tjemenom triedra koji obrazuju dvije susjedne strane roglja i poligon. U $\triangle VA_1A_2$ označili smo uglove (vidite sliku!) sa a_1, b_1, c_1; u $\triangle VA_2A_3$ imamo uglove a_2, b_2, c_2 itd; u $\triangle VA_nA_1$ biće uglovi a_n, b_n, c_n.



Sl. 93

Tada je

$$a_1<b_1+c_n$$
$$a_2<b_2+c_1$$
$$a_3<b_3+c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n<b_n+c_{n-1}.$$

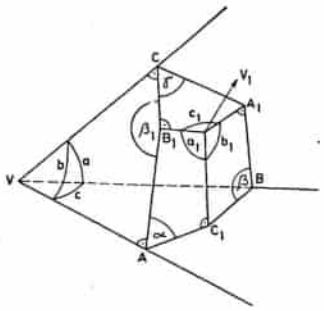
Odavde je

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<(b_1+c_n)+(b_2+c_1)+$$
$$+(b_3+c_2)+\cdots+(b_n+c_{n-1}).$$

Na lijevoj strani ove nejednakosti je suma uglova n-tougla, a ta iznosi $(n-2)180°$. Na desnoj strani nejednakosti je suma uglova

na osnovicama trouglova VA_1A_2, $VA_2A_3, \ldots, VA_nA_1$. Ta suma, zajedno sa sumom svih strana $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ čini $n\cdot 180°$ pa gornja nejednakost prelazi u oblik $(n-2)180°<n\cdot 180°-(a_1+a_2+a_3+\cdots a_n)$, a odavde zaključujemo da je $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<360°$.

98. Po pretpostavci je $V_1A_1\perp a$ (sl. 94), $V_1B_1\perp b$ i $V_1C_1\perp c$. Treba dokazati da je i $VA\perp a_1$, $VB\perp b_1$ i $VC\perp c_1$; zaista $VA\perp a_1$ jer je VA prava u kojoj se sijeku ravni VAB i VAC koje su normalne na ravan $V_1B_1C_1$. Iz istog razloga je $BV\perp b_1$ i $VC\perp c_1$.

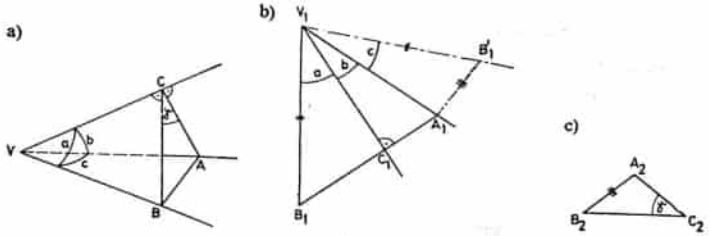


Sl. 94

99. Četvorougao $AB_1V_1C_1$ (vidite sliku iz prethodnog zadatka!) je sa dva prava ugla (pri tjemenima B_1 i C_1). Prema tome je $\alpha+a_1=180°$ gdje je α ugao diedra, a a_1 strana njemu polarnog roglja. Analogno nalazimo $\beta+b_1=180°$ i $\gamma+c_1=180°$. Četvorougao AB_1CV ima prave uglove pri tjemenima A i C, pa je $b+\beta_1=180°$ gdje je b strana a β_1 nagibni ugao njemu polarnog roglja. Isto tako je $a+\alpha_1=180°$ i $c+\gamma_1=180°$.

100. Označimo li sa σ sumu nagibnih uglova n-tostranog roglja, a sa s_1 sumu strana njemu polarnog roglja, onda je, prema ranije dokazanoj teoremi, $\sigma+s_1=n\cdot 180°$. Prema tome je $\sigma<n\cdot 180°$; kako je $s_1<360°$, to je $\sigma+s_1-s_1>n\cdot 180°-360°$ ili $\sigma>(n-2)180°$. Posljedica: suma nagibnih uglova (diedara) triedra je manja od 540° a veća od 180°.

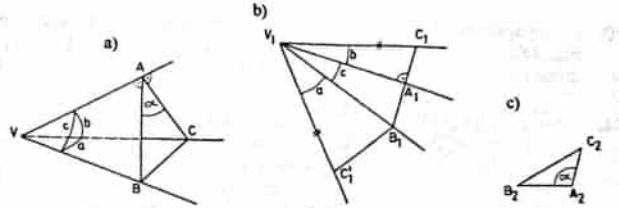
101. U triedru $VABC$ (sl. 95 *a*) poznate su strane a i b i ugao γ. Ako presiječemo triedar u proizvoljnoj tački C ivice VC sa ravni koja je



Sl. 95

normalna na VC, pojaviće se, kao presjek, trougao ABC. Zamislimo da smo u ravan razvili čitav triedar (sl. 95 *b*). Stranice CA i CB trougla ABC javljaju se u razvijenoj slici kao normale C_1A_1 i C_1B_1 na V_1C_1. Trougao ABC možemo konstruisati pomoću njegovih stranica $CA=C_1A_1=C_2A_2$ (sl. 95 *c*), $CB=C_1B_1=C_2B_2$ i zadanog ugla γ među njima. Time dobivamo stranicu $A_2B_2=AB$ trougla ABC koju treba prenijeti šestarom na sliku b) iz tačke A_1 tako da bude $A_1B_1'=A_2B_2$ i $V_1B_1'=V_1B_1$; $A_1V_1B_1'$ je tražena strana c triedra itd.

102. Pretpostavimo da smo triedar $VABC$ presjekli u proizvoljnoj tački A ivice VA ravninom (ravni) koja je normalna na tu ivicu (sl. 96 *a*). Kao presjek će se javiti $\triangle ABC$ u kome treba odrediti ugao α. Zamislimo da smo triedar razvili u ravan (sl. 96 *b*). Na toj slici javiće se dvije stranice AB i AC trougla ABC kao normale A_1B_1 i



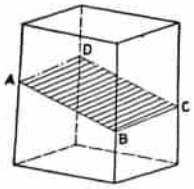
Sl. 96

A_1C_1 na V_1A_1, a VC (sl. 96 *a*) se javlja kao V_1C_1, odnosno V_1C_1' (sl. 96 *b*). Pomoću duži $C_1A_1=CA$, $A_1B_1=AB$ i $B_1C_1'=BC$ može se konstruisati $\triangle A_2B_2C_2$ (sl. 96 *c*) tako da bude $C_2A_2=CA, A_2B_2=AB$ i $B_2C_2=BC$. $\sphericalangle B_2A_2C_2$ je traženi ugao α. Na isti način našli bismo ostale uglove β i γ triedra.

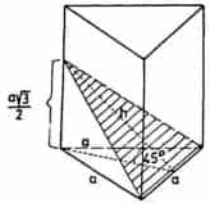
4. Prizma

103. Kod paralelepipeda su suprotne strane paralelne. Razmotrimo presjek $ABCD$ (sl. 97). Svakako je $AB \parallel CD$ jer su to presjeci u kojima presječna ravan presijeca dvije paralelne ravni. Iz istog razloga je $BC \parallel AD$.

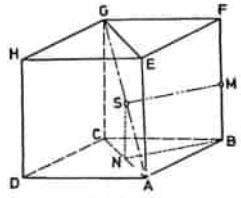
104. $h = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (sl. 98); $P = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.



Sl. 97



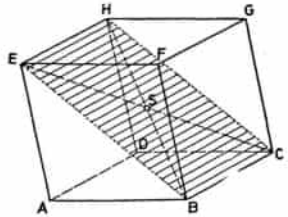
Sl. 98



Sl. 99

105. Treba odrediti najkraću udaljenost ivice BF (sl. 99) od dijagonale AG. Projicirajmo u bazu tu ivicu i dijagonalu. Ivica se projicira u tačku B a dijagonala AG u AC. Najkraća udaljenost tačke B od AC je BN gdje je N sredina duži AC. U N se projicira sredina S dijagonale AG. Prema tome je MS tražena najkraća udaljenost.

106. $ABCD \parallel EFGH$ i $ABCD \cong EFGH$ (sl. 100) jer su dvije stranice AB i AD koje se sijeku u jednoj tački paralelne sa dvije stranice EF i EH koje se također sijeku u jednoj tački, a osim toga su $AB = EF$ i $AD = EH$, kao suprotne stranice paralelograma. To isto nalazimo za ostale suprotne strane paralelepipeda.

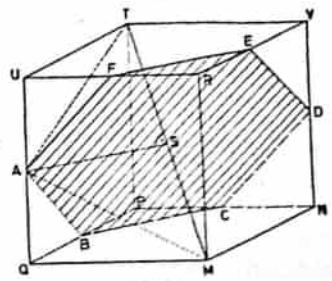


Sl. 100

107. Paralelepiped je prizma kod koje su sve strane paralelogrami. Razmotrimo presjek $BCHE$ (sl. 100) prizme i u njemu dvije njezine dijagonale BH i CE. Lako se dokazuje da je $BCHE$ paralelogram. Presječna tačka S njegovih dijagonala istovremeno je tačka u kojoj se sijeku dijagonale paralelepipeda itd.

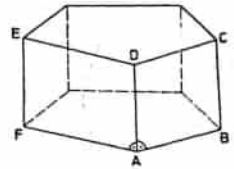
108. 25, $4\sqrt{34}$, $3\sqrt{41}$.

109. Dokažimo najprije da je $ABCDEF$ (sl. 101) presjek kocke dobiven presijecanjem sa ravni koja prolazi sredinom S dijagonale MT i na njoj je normalna. Razmotrimo $\triangle AMT$. Kako je $AM = AT$ (zašto?), to je jednakokraki trougao (jednakokračan) u kome je AS visina na osnovicu MT, pa je $AS \perp MT$. Na isti način se dokazuje da su spojnice tačaka B, C, D, E i F sa tačkom S također normalne na MT. Prema tome, šestougao (šesterokut) $ABCDEF$ leži u ravni koja je normalna na MT i prolazi njezinom sredinom S, tj. to je upravo onaj šestougao na koji se teorema odnosi. Treba još dokazati da je taj šestougao pravilan. U tu svrhu razmotrimo podudarne trouglove ABQ, BCP, CDN, DES, EFR i FAU (zašto su podudarni?) i dokažimo još da su trouglovi ABS, BCS, CDS, DES, EFS i FAS jednakostranični i podudarni itd.

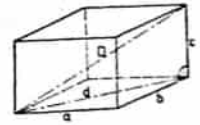


Sl. 101

110. Po pretpostavci su $ABCD$ i $ADEF$ (sl. 102) pravougaonici. Tada je AD normalno na bazu prizme (zašto?). Kako je $FE \parallel AD$, i FE je normalno na bazu prizme itd.



Sl. 102



Sl. 103

111. Iz relacija $d^2 = a^2 + b^2$ (sl. 103) i $D^2 = c^2 + d^2$ slijedi $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

112. To je posljedica relacije $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

113. Iz sistema $b^2 + c^2 = d_1^2$, $c^2 + a^2 = d_2^2$, $a^2 + b^2 = d_3^2$ nalazimo ivice (bridove):

$$a = \sqrt{\frac{-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{d_1^2 - d_2^2 + d_3^2}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{2}}$$

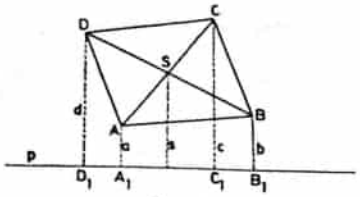
a zatim i prostornu dijagonalu

$$D = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2}}.$$

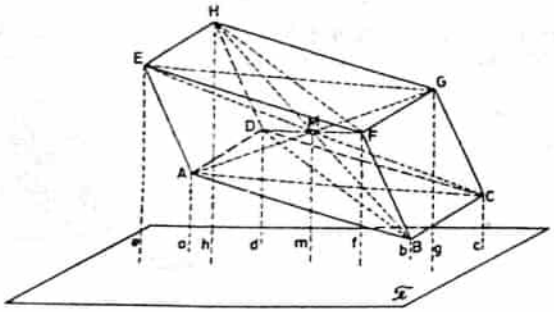
114. Uglovi na bazi iznose $(n-2)180°$, pa je suma svih uglova

$$2(n-2)180°+n\cdot 360°=(n-1)720°=8(n-1)R.$$

115. Dokazaćemo najprije teoremu: ako sva tjemena (vrhovi) paralelograma leže s iste strane neke prave (pravca), onda je udaljenost presječne tačke dijagonala paralelograma od te prave jednaka četvrtini sume udaljenosti svih tjemena (vrhova) paralelograma od iste prave. Neka su a, b, c, d redom udaljenosti tjemena (vrhova) A, B, C, D paralelograma od prave p (sl. 104) a s udaljenost presječne tačke S dijagonala paralelograma od iste prave. Tada iz trapeza AA_1C_1C slijedi $s=\frac{a+c}{2}$, a iz trapeza BB_1D_1D nalazimo $s=\frac{b+d}{2}$. Iz te dvije relacije izlazi $s=\frac{a+b+c+d}{4}$. Neka su tjemena (vrhovi) A, B, C, D (sl. 105) udaljena od ravni π za a, b, c, d. Tjemena (vrhovi) E, F, G, H udaljena su od ravni π za e, f, g, h. Ako je k razlika $e-a$, onda je $e=a+k$; analogno će biti $f=b+k$, $g=c+k$, $h=d+k$ (zašto?). Suma udaljenosti svih tjemena (vrhova) paralelepipeda od ravni π iznosiće $\Sigma=2(a+b+c+d+2k)$ (1); ako je presječna tačka M dijagonala paralelepipeda udaljena od ravni π za m, onda iz paralelograma $BDHF$ zaključujemo da je $m=\frac{b+f+d+h}{4}=\frac{2(b+d+k)}{4}$ (2). Iz paralelograma $ACGE$ slijedi $m=\frac{a+c+g+e}{4}=\frac{2(a+c+k)}{4}$ (3). Iz (2) i (3) slijedi $m=\frac{2(a+b+c+d+2k)}{8}$, a to je i trebalo dokazati.

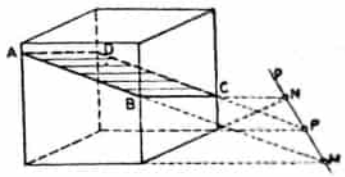


Sl. 104

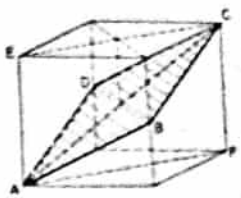


Sl. 105

116. Zadane su tačke A, B, C (sl. 106) koje određuju ravan koja presijeca kocku. Treba naći tačku D presjeka $ABCD$. Tačke M i N određuju pravu p u kojoj se ravan (ABC) siječe s ravni baze kocke. Na istoj pravoj se siječe u tački P prava CD sa svojom projekcijom na ravan baze kocke itd.



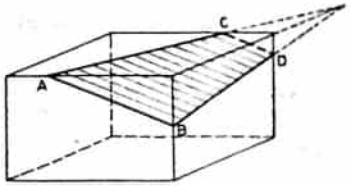
Sl. 106



Sl. 107

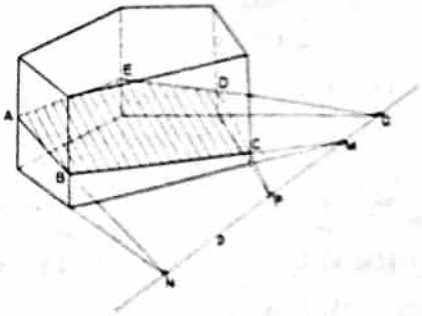
117. (Sl. 107). Traženi presjek $ABCD$ je normalan na dijagonalni presjek $AFCE$ kocke.

118. (Sl. 108)



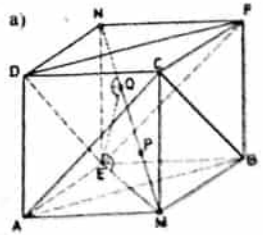
Sl. 108

119. (Sl. 109)

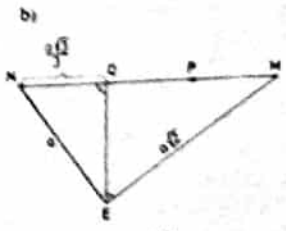


Sl. 109

120. Presjeci su jednakostranični trouglovi (trokuti) ABC i DEF (sl. 110 *a*) čije su stranice $a\sqrt{2}$. Obrazloženje vidimo na slici 110 *b*.



Sl. 110 a



Sl. 110 b

121. a) $a=\sqrt{\frac{P}{6}}=9, \quad D=9\sqrt{3}, \quad V=729$

b) $a=\sqrt[3]{V}=8, \quad D=8\sqrt{3}, \quad P=384$

c) $a=\frac{D}{\sqrt{3}}=4, \quad P=96, \quad V=64$

d) $a^3=6a^2, \quad a=6, \quad D=6\sqrt{3}, \quad P=V=216.$

122. Ako je x ivica kocke dvaput veće površine, onda je $6x^2=2\cdot 6a^2$ a odavde $x=a\sqrt{2}; \quad D=x\sqrt{3}=a\sqrt{6}$.

123. a) Iz jednačine $6a^2=294$ nalazimo ivicu $a=7$ cm.

b) $d=a\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ cm c) $D=a\sqrt{3}=7\sqrt{3}$ cm.

124. Ako su ivice a i b, onda je $a:b=3:2$ i $6a^2-6b^2=120$. Iz proporcije je $a=3k$, $b=2k$. Zamjenom u jednačini $a^2-b^2=20$ nalazimo $k=2$, pa je $a=6$, $b=4$.

125. Ako je a ivica kocke, onda je tražena površina $P=6\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2+$

$+8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2=a^2(3+\sqrt{3}); \quad V=a^3-8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{a}{2}=$

$=\frac{5}{6}a^3.$

126. Ako je a ivica (brid) kocke, onda je $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}$, $a=2$; površina kocke iznosi 24 kvadratne jedinice a zapremina (volumen) 8 kubnih jedinica.

127. Iz jednačine $a^2\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ nalazimo $a=3$; $P=54$ kvadratne jedinice; $V=27$ kubnih jedinica.

128. a) $D=\sqrt{2a^2+b^2}=3, \quad P=2a^2+4ab=16, \quad V=a^2b=4$

b) $b=\sqrt{D^2-2a^2}=1, \quad P=16, \quad V=4$

c) $a=\sqrt{\frac{D^2-b^2}{2}}=4, \quad P=144, \quad V=112$

d) $b=\frac{P-2a^2}{4a}=4, \quad D=12, \quad V=256$

e) $a=\sqrt{\frac{V}{b}}=12, \quad D=17, \quad P=336$

f) Imamo sistem jednačina $a:b=2:1$, $a^2b=256$; iz proporcije $a=2k$, $b=k$ pa iz druge jednačine nalazimo $4k^3=256$,

$k=4$, pa je $a=8$, $b=4$; $P=256$, $D=12$.

g) Sistem $2a^2+4ab=a^2b$, $a=2b$ ima rješenje $b=4$, $a=8$; $P=V=256$, $D=12$.

h) $a=32$, $b=16$, $D=48$, $P=4096$, $V=16384$.

129. a) $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7, \quad P=2(bc+ca+ab)=2(18+12+6)=$

$=2\cdot 36=72, \quad V=abc=36$

b) $c=\sqrt{D^2-a^2-b^2}=\sqrt{81-1-64}=4, \quad P=88, \quad V=32$

c) Iz jednačine $2(bc+ca+ab)=88$, uz zadane veličine a i b, dobijamo $c=1$; $D=9$, $V=32$.

d) $c=\frac{V}{ab}+1, \quad D=19, \quad P=264$

e) $a:b:c=2:3:6$, $a^2+b^2+c^2=D^2$; $a=2k$, $b=3k$, $c=6k$;

$49k^2=196$, $k=2$; $a=4$, $b=6$, $c=12$; $P=288$, $V=288$

f) $a:b:c=1:6:18$, $2(bc+ca+ab)=132$; $a=k$, $b=6k$, $c=18k$;

$2(6k\cdot 18k+18k\cdot k+k\cdot 6k)=264$, $k=1$, $D=19$, $V=108$.

130. Iz sistema $abc=288$, $a=2k$, $b=3k$, $c=6k$ slijedi $k=2$, pa je $a=4$, $b=6$, $c=12$.

131. Iz $a:b:c=2:3:6$ slijedi $a=2k$, $b=3k$, $c=6k$, pa je $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=$

$=\sqrt{49k^2}=21$; $k=3$, $a=6$, $b=9$, $c=18$, $P=648$, $V=972$.

132. Iz sistema jednačina $a:b=3:4$, $c^2=400$, $a^2+b^2+c^2$ nalazimo $a=12$, $b=16$, $c=20$; $D=20\sqrt{2}$, $P=1504$, $V=3840$.

133. Ako je x ivica kocke, onda je $6x^2=2(bc+ca+ab)$; $x=20$, $V=8000$.

134. $2(bc+ca+ab)=abc$; dijeljenjem sa $2abc$ slijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$.

135. a) $P=a^2+a\cdot a\sqrt{2}+a(h-a)+ah+2\cdot\frac{h+(h-a)}{2}\cdot a=4ah+$

$+a^2(\sqrt{2}-1), \quad V=\frac{h+(h-a)}{2}\cdot a\cdot a=\frac{a^2}{2}(2h-a)$

b) $P=a^2+a\cdot\frac{2a\sqrt{3}}{3}+ah+a\left(h-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)+2\cdot\frac{a}{2}\left(h+h-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=$

$=a^2+4ah, \quad V=\frac{a^2}{2}\left(2h-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$

c) $P=a^2+a\cdot 2a+ah+a(h-a\sqrt{3})+2\cdot\frac{h+h-a\sqrt{3}}{2}\cdot a=$

$=4ah+a^2(3-2\sqrt{3}), \quad V=\frac{a^2}{2}(2h-a\sqrt{3}).$

136. a) $a=b\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, $P=b^2+2bc+ac=3(13+5\sqrt{2})$, $V=\frac{1}{2}b^2c=\frac{45}{2}$

b) $b=\frac{a}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $P=8(6+5\sqrt{2})$, $V=40$

c) Iz sistema $b^2+2bc+ac=P$, $a=b\sqrt{2}$ slijedi $c=\frac{P-b^2}{b(2+\sqrt{2})}=4$, $a=2\sqrt{2}$, $V=8$

d) $b=\frac{a}{\sqrt{2}}=4$, $c=\frac{2V}{b^2}=5$, $P=56+20\sqrt{2}$.

137. a) $c=\sqrt{a^2+b^2}=13$, $P=ab+H(a+b+c)=180$, $V=\frac{1}{2}abH=120$

b) $b=\sqrt{c^2-a^2}=4$, $H=\frac{P-ab}{a+b+c}=6$, $V=36$

c) $b=8$, $H=\frac{2V}{ab}=3$, $P=120$

d) $a=\frac{2V}{bH}=4$, $c=5$, $P=36$.

138. $P=ab+(a+b+\sqrt{a^2+b^2})\sqrt{a^2+b^2}$, $V=\frac{1}{2}ab\sqrt{a^2+b^2}$.

139. a) $P=5B$; ako je a stranica baze, onda je $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=B$, tj. $a=\frac{2\sqrt{B}}{\sqrt[4]{3}}$ (1); radijus upisane kružnice $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ ili $a=\frac{6r}{\sqrt{3}}$ (2), iz (1) i (2) slijedi $B=\frac{9r^2}{\sqrt{3}}$, pa je $P=\frac{45r^2}{\sqrt{3}}$.

b) $r=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{P\sqrt{3}}{5}}$.

140. $H=\frac{2P-a^2\sqrt{3}}{6a}=\sqrt{3}$.

141. $H=\frac{2P-a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)}$.

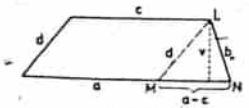
142. a) $P=2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}+H(a+b+c)$ gdje je $s=\frac{a+b+c}{2}$;

$P=588$, $V=H\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=840$ b) $P=112$, $V=48$.

143. Iz površine trougla (trokuta) LMN (sl. 111) možemo izračunati visinu trapeza v. Površina trougla iznosi 84, pa je njegova visina $v=\frac{2\cdot 84}{a-c}=12$. Površina prizme je

$P=v(a+c)+H(a+b+c+d)=852$,

$V=\frac{(a+c)vH}{2}=1560$.



Sl. 111

144. a) $P=3a^2\sqrt{3}+6aH=12(3+\sqrt{3})$,

$V=\frac{3a^2H\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$

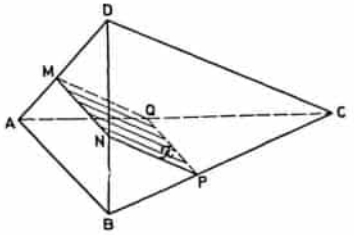
b) $a=2$, $H=4$; $P=12\sqrt{3}+48=12(\sqrt{3}+4)$

c) $a=3$, $H=2$; $V=27\sqrt{3}$.

5. Piramida

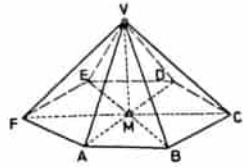
145. Suma uglova na bazi iznosi $(n-2)180°$ a suma uglova na bočnim stranama je $n \cdot 180°$, pa je tražena suma $(n-2)180° + n \cdot 180° = (n-1)360° = 4(n-1)R$.

146. Uzmimo da ravan π siječe ivicu AD (sl. 112) u tački M i da je paralelna s ivicama AB i CD. Ravan π će presjeći stranu ABD u duži $MN \parallel AB$ (zašto?) a stranu ACD u duži $MQ \parallel CD$. Stranu BCD će presjeći u duži $NP \parallel CD$ (zašto?) a stranu ABC u duži $PQ \parallel AB$. Prema svemu je $MN \parallel PQ$ i $PN \parallel MQ$, a to je i trebalo dokazati.

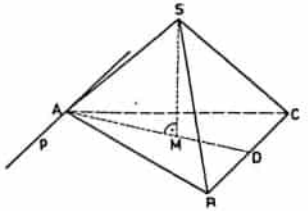


Sl. 112

147. Kako je VM normalno na bazu piramide a, po pretpostavci, je $VA = VB = VC = VD = VE = VF$ (sl. 113), trouglovi $AMV, BMV, \ldots, FMV$ su (podudarni, zašto?), pa je $AM = BM = CM = \cdots = FM$, tj. oko baze možemo opisati kružnicu, a to je i trebalo dokazati.



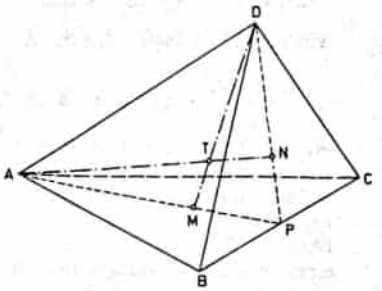
Sl. 113



Sl. 114

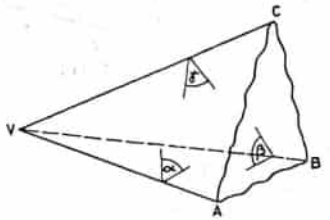
148. Treba dokazati da su ivice AS i BC (sl. 114) normalne. — Visina SM tetraedra i visina AD njegove baze prolaze kroz istu tačku M. Povucimo u ravni (ravnini) baze pravu $p \perp AD$. Kako je $MA \perp p$, to je $SA \perp p$ (zašto?), itd.

149. Tačka M je težište $\triangle ABC$ (sl. 115) a N težište $\triangle BCD$. Duži AN i DM leže u istoj ravni APD, pa se sijeku u nekoj tački T. Spojmo tačke M i N; $\triangle ATD \sim \triangle NMT$ (zašto?), pa je $AT:TN = DT:TM = AD:MN = AP:MP = 3:1$. Da duži koje polaze iz tačaka B i C prolaze kroz istu tačku T, slijedi iz činjenice da i one dijele AN (i DM) u razmjeri 3:1.

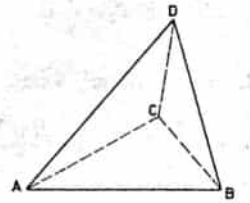


Sl. 115

150. Najprije dokažimo teoremu: simetralne ravni diedra nekog triedra sijeku se u istoj pravoj (pravcu). —Simetralne ravni diedara α i β (sl. 116) sijeku se u nekoj pravoj p. Sve tačke prave p podjednako su udaljene od ravni VAB i VAC (zašto?) kao i od ravni VBA i VBC. Prema tome su podjednako udaljene i od ravni VCA i VCB, pa slijedi da prava p leži i u simetralnoj ravni diedra γ. — Razmotrimo sada trostranu



Sl. 116

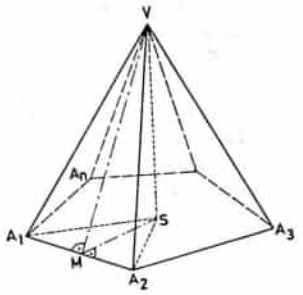


Sl. 117

piramidu $ABCD$ (sl. 117). Sve tri simetralne ravni triedra $DABC$ (vrh u tački D a ivice DA, DB i DC) prolaze kroz istu pravu p. Ta je prava geometrijsko mjesto tačaka koje su podjednako udaljene od bočnih strana DBC, DCA i DAB. Simetralna ravan diedra koji obrazuju ravni ABC i ABD siječe pravu p u tački u kojoj se sijeku i simetralne ravni ostalih diedara. Ta tačka je podjednako udaljena od svih strana piramide, pa je stoga centar lopte (sfere, kugle) upisane u piramidu.

151. Simetralne ravni ivica AB i AC (sl. 117) sijeku se u nekoj pravoj p. Ta prava je geometrijsko mjesto tačaka koje su podjednako udaljene od tjemena A, B i C. Prava p prodire kroz simetralnu ravan duži AD u nekoj tački S koja je podjednako udaljena od sva četiri tjemena tetraedra (objasnite zašto!). Ona je jedina zajednička tačka simetralnih ravni svih ivica tetraedra. Tačka S je centar sfere koja se može opisati oko tetraedra.

152. Zadana je neka piramida $VA_1A_2A_3 \dots A_n$ (sl. 118). Projicirajmo u bazu piramide njezine bočne strane. Pri tome se vrh V projicira u podnožje S visine a pojedine bočne strane u trouglove A_1A_2S, A_2A_3S, $\dots$, A_nA_1S. Visina VM trougla A_1A_2S projicira se u visinu MS trougla A_1A_2S. Kako je $MV > MS$, to je $\frac{A_1A_2 \cdot MV}{2} > \frac{A_1A_2 \cdot MS}{2}$, tj. površina $\triangle A_1A_2V$ je veća od površine trougla A_1A_2S. Na isti način se dokazuje da je površina svake bočne strane veća od njezine projekcije na bazu piramide. Prema tome je i suma svih bočnih strana veća od sume njihovih projekcija na bazu piramide. Posljednja suma je upravo površina piramidine baze. — Pokažite da dokazana teorema vrijedi i u slučaju ako se vrh piramide projicira van njene baze ili na njezinom rubu.



Sl. 118

153. Površine B_1 i B_2 presjeka dobiju se iz relacija $B : B_1 = H^2 : \left(\frac{2}{3}H\right)^2$, odakle je $B_1 = \frac{4}{9}B$ i $B : B_2 = H^2 : \left(\frac{1}{3}H\right)^2$ odakle je $B_2 = \frac{1}{9}B$.

154. 36 cm², 16 cm², 4 cm².

155. a) $\frac{H\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{H\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{H}{2}$ d) $\frac{H}{5}$.

156. Visina piramide je $H = \frac{a}{4}$. Ako je visina kocke x, onda je $a^2 : x^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 : \left(\frac{a}{4} - x\right)^2$ a odavde je $x = \frac{a}{5}$.

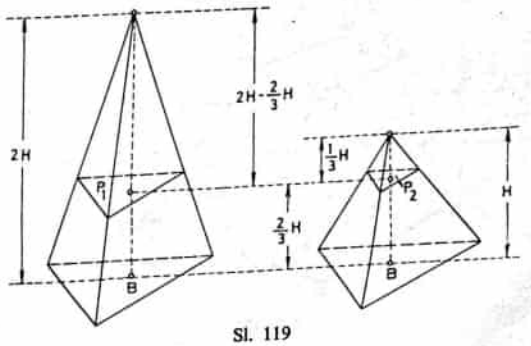
157. Ako je x tražena udaljenost, onda je $72\sqrt{3} : 8\sqrt{3} = 12^2 : x^2$; odavde je $x = 4$ cm.

158. Baza piramide je $B = 54\sqrt{3}$. Ako je x tražena udaljenost, onda je $54\sqrt{3} : 6\sqrt{3} = 12^2 : (12 - x)^2$; $x = 8$ cm.

159. Iz sistema $P_1 - P_2 = R$, $P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$ slijedi $P_1 = \frac{Rd_1^2}{d_1^2 - d_2^2}$;

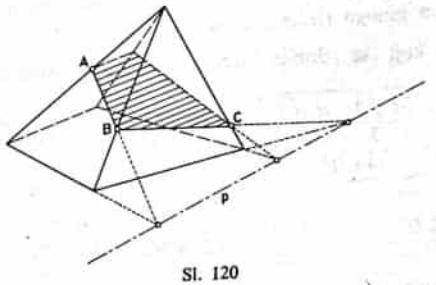
$P_2 = \frac{Rd_2^2}{d_1^2 - d_2^2}$.

160. Ako je B površina jednakih baza, P_1 površina presjeka na većoj a P_2 na manjoj piramidi (sl. 119), onda je $B : P_1 = 4H^2 : \left(2H - \frac{2}{3}H\right)^2$, odakle je $P_1 = \frac{4}{9}B$ (1); $B : P_2 = H^2 : \left(\frac{1}{3}H\right)^2$ odakle je $P_2 = \frac{1}{9}B$ (2). Iz (1) i (2) nalazimo $P_1 : P_2 = 4 : 1$.



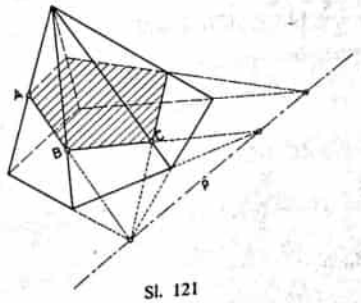
Sl. 119

161. (Sl. 120).



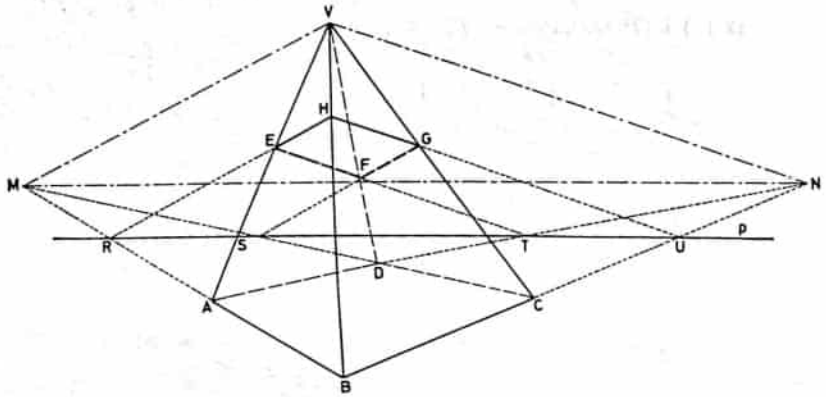
Sl. 120

162. (Sl. 121).



Sl. 121

163. Ravni ABV i CDV (sl. 122) sijeku se u pravoj MV, ravni BCV i ADV sijeku se u pravoj NV. Stranice traženog paralelograma biće paralelne sa pravama MV i NV (zašto?). pa i presječna ravan treba da je paralelna sa pravama MV i NV (zašto?). Povučemo li proizvoljnu



Sl. 122

pravu $p \parallel MN$ i kroz tačke R i S paralele sa MV a kroz tačke T i U paralele sa NV, dobićemo traženi paralelogram. Zadatak ima beskonačno mnogo rješenja (zašto?).

164. Trougao koji se dobije kao presjek ima osnovicu $\frac{a}{2}$ i visinu $h=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3a^2+144H^2}}{12}$. Površina presjeka je $P=\frac{a\sqrt{3a^2+144H^2}}{48}$.

165. $\frac{a\sqrt{a^2+8H^2}}{8}$.

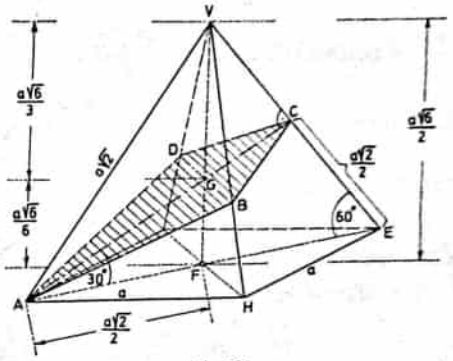
166. Treba izračunati površinu deltoida $ABCD$ (sl. 123). Iz $\triangle ACE$ nalazimo $AC=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Iz $\triangle AFG$ slijedi $FG=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Prave VF i VH pramena su presječene paralelama $FH \parallel GB$, pa je $VF:VG=FH:GB$, $\frac{a\sqrt{6}}{2}:\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{2}:GB$; odavde je $GB=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Površina deltoida iznosi $P=AC\cdot GB=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

167. a) $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $H=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $a=\frac{2h\sqrt{3}}{3}$, $H=\frac{h\sqrt{6}}{3}$

c) $a=H\sqrt{2}$, $h=\frac{H\sqrt{6}}{2}$.

168. a) $h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$, $H=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$

b) $b=\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$, $H=\sqrt{h^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$



Sl. 123

c) $b=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$, $h=\sqrt{H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

d) $a=2\sqrt{b^2-h^2}$, $H=\sqrt{2h^2-b^2}$

e) $a=\sqrt{2(b^2-H^2)}$, $h=\sqrt{\frac{b^2+H^2}{2}}$

f) $a=2\sqrt{h^2-H^2}$ $b=\sqrt{2h^2-H^2}$.

169. $b=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$, $h=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}$.

170. a) $H=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ b) $a=\frac{H\sqrt{6}}{2}$.

171. a) $h=3$, $H=\frac{\sqrt{33}}{3}$, $P=4(9+4\sqrt{3})$, $V=\frac{16\sqrt{11}}{3}$

b) $H=\sqrt{61}$, $P=9(8+\sqrt{3})$, $V=3\sqrt{183}$

c) $h=5$, $P=72\sqrt{3}$, $V=36\sqrt{3}$

d) $a=6$, $P=9(4+\sqrt{3})$, $H=\sqrt{13}$, $V=3\sqrt{39}$.

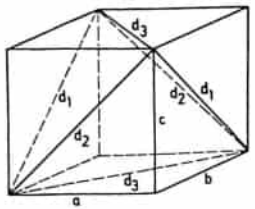
172. $h=\frac{a\sqrt{15}}{2}$, $H=\frac{a\sqrt{33}}{3}$, $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(1+3\sqrt{5})$, $V=\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

173. Bočna ivica $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $P=\frac{a^2}{4}(3+\sqrt{3})$, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2 b=$ $=\frac{b^3}{6}=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

174. Radijus upisane kružnice je $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, bočna ivica $a\sqrt{3}$, visina piramide $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$, a zapremina (volumen) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

175. Visina bočne strane je $h=\frac{7a\sqrt{3}}{6}$, pa je $P=2a^2\sqrt{3}$. Kako je $2a^2\sqrt{3}=18\sqrt{3}$, to je $a=3$; $V=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

176. Ako su d_1, d_2 i d_3 (sl. 124) dijagonale strana kvadra, onda je $d_1^2=b^2+c^2=169$, $d_2^2=c^2+a^2=196$, $d_3^2=a^2+b^2=225$, pa je $d_1=13$, $d_2=14$, $d_3=15$. Površina jedne strane piramide je 84, a površina piramide $P=4\cdot 84=336$ kvadratnih jedinica. Zapremina (volumen) $V=\frac{abc}{6}=$ $=21\sqrt{55}$ kubnih jedinica.



Sl. 124

177. a) $h=12$, $H=\sqrt{119}$, $P=a^2+2ah=340$, $V=\frac{100\sqrt{119}}{3}$

b) $h=\frac{P-a^2}{2a}=5$, $H=4$, $b=\sqrt{34}$, $V=48$

c) $H=\frac{3V}{a^2}=8$, $h=10$, $b=2\sqrt{34}$, $P=384$

d) $H=\sqrt{161}$, $a=16$, $P=736$, $V=\frac{256\sqrt{161}}{3}$

e) $a=6$, $h=5$, $P=96$, $V=48$

f) Na osnovu zadanih veličina i obrasca $P=a^2+2ah$ dobijamo jednačinu $a^2+10a-144=0$ čije je rješenje $a=8$ (drugo rješenje nema smisla); $H=3$, $b=\sqrt{41}$, $V=64$.

g) Ako u sistemu $a^2+2ah=96$, $h^2-\frac{a^2}{4}=16$ eliminišemo a^2, dobijamo jednačinu $2h^2+ah-80=0$ odakle je $a=\frac{80-2h^2}{h}$; time druga jednačina sistema prelazi u jednačinu $4h^2-\left(\frac{80-2h^2}{h}\right)^2=64$; odavde je $h=5$; $a=6$, $b=\sqrt{34}$, $V=48$.

h) $a=\sqrt{\frac{3V}{H}}=12$, $h=10$, $b=2\sqrt{34}$, $P=384$

i) Jednačina $a^2+2ah=\frac{a^2H}{3}$ prelazi u oblik $3a+6h=aH$; $a=6k$, $h=5k$, $H=4k$ itd; $k=2$, $a=12$, $h=10$, $H=8$, $P=V=384$, $b=2\sqrt{34}$.

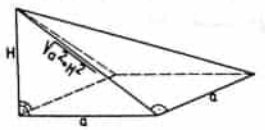
178. Ako je a ivica piramide, onda je $\frac{a^2H}{3}=36\sqrt{2}$ i $\frac{a\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ odakle je $a=6$, pa je $P=a^2+a^2\sqrt{3}=36(1+\sqrt{3})$.

179. $a^2+2ah=336$, $b:a=5:6$, $h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=b^2$; rješenje: $a=12$, $b=10$, $h=8$, $H=2\sqrt{7}$, $V=96\sqrt{7}$.

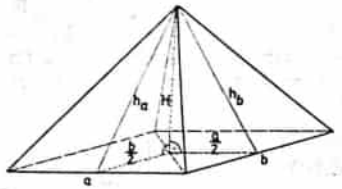
180. Veličine a, h i H treba da zadovoljavaju jednačine $a^2+2ah=384$, $a:H=3:2$, $h^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+H^2$. Iz druge jednačine je $H=\frac{2a}{3}$ a iz treće $h=\frac{5a}{6}$. Zamjenom u prvoj jednačini slijedi $a=12$; $H=8$, $h=10$.

181. $P=\frac{4H^2}{3}$, $V=\frac{4H^3}{45}$.

182. $aH+a\sqrt{H^2+a^2}=3a^2$ (sl. 125); odavde je $\sqrt{H^2+a^2}=3a-H$ ili $8a^2=6aH$, tj. $4a=3H$, pa slijedi $H:a=4:3$.



Sl. 125



Sl. 126

183. Površina dijagonalnog presjeka je $\frac{1}{2}H\sqrt{a^2+b^2}=12\sqrt{106}$ odakle $H=12$. Visine bočnih strana su $h_a=\sqrt{H^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=15$ (sl. 126) i $h_b=\sqrt{H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=13$. Površina je $P=ab+ah_a+bh_b=564$ kvadratnih jedinica a zapremina $V=\frac{abH}{3}=720$ kubnih jedinica.

184. a) $h=12$, $H=\sqrt{69}$, $P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+3ah=30(12+5\sqrt{3})$,

$V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{2}=150\sqrt{23}$

b) $b=\sqrt{109}$ $H=\sqrt{73}$, $P=18(10+3\sqrt{3})$, $V=18\sqrt{219}$

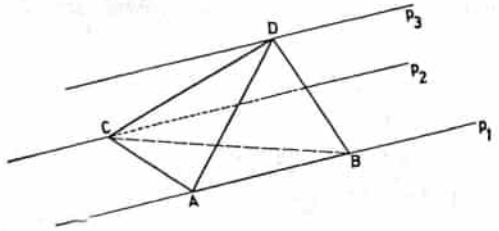
c) $H=\frac{2V}{a^2\sqrt{3}}=6$, $h=4\sqrt{3}$, $P=72\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{13}$

d) $h=\frac{2P-3a^2\sqrt{3}}{6a}=2\sqrt{3}$, $H=3$, $b=\sqrt{13}$, $V=6\sqrt{3}$.

185. $h=a\sqrt{3}$, pa je $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+3a^2\sqrt{3}=18\sqrt{3}$, odakle $a=2$;

$V=6\sqrt{3}$.

186. Zapremina (volumen) tetraedra $ABCD$ (sl. 127) zavisi od veličine njegove površine baze ABC i visine, tj. od udaljenosti tačke D od



Sl. 127

ravni ABC. Jedna i druga od tih veličina su stalne kad se tačka C kreće po pravoj p_2 i tačka D po pravoj p_3 (zašto su stalne?).

6. Zarubljena (krnja) piramida

187. Ako je x visina dopunske piramide (dopunjka), onda je $B_1:B_2=(H+x)^2:x^2$; odavde je $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$. U našem slučaju $x=3$. Ako je B površina traženog presjeka, onda je $B_1:B=(H+x)^2:(H+x-3)^2$; odavde je $B=36$ kvadratnih jedinica.

188. $B_3=36$, $B_4=16$.

189. Iz obrasca $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$ slijedi $x=9$. Kako je $B:B_2=(x+y)^2:x^2$ a $B=\frac{B_3+B_2}{2}=17$, to je $17:9=(9+y)^2:9^2$ a odavde $y=3(\sqrt{17}-3)$.

190. Visina dopunske piramide je $x=12$; $B=\sqrt{B_1B_2}=6$. Iz proporcije $B:B_2=(x+y)^2:x^2$ slijedi $y=6(\sqrt{6}-2)$.

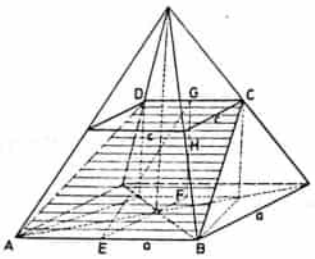
191. Treba dokazati da je $B=\frac{1}{2}\left(\frac{B_1+B_2}{2}+\sqrt{B_1B_2}\right)$. Kako je visina dopunske piramide $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$ i $B:B_2=\left(\frac{H}{2}+x\right)^2:x^2$, to je $B=B_2\left(\frac{H}{2x}+1\right)^2=\frac{(\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2})^2}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{B_1+B_2}{2}+\sqrt{B_1B_2}\right)$.

192. Visina dopunske piramide je $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$, pa iz relacije $B:B_2=\left(H-\frac{H}{n}+x\right)^2:x^2$ slijedi $B=\left[\frac{(n-1)\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}}{n}\right]^2$.

193. Ako su y i z dijelovi visine H, onda je $y+z=H$, $y:z=m:n$, odakle nalazimo $y=\frac{Hm}{m+n}$, $z=\frac{Hn}{m+n}$. Visina dopunske piramide (dopune) je $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$. Iz proporcije $B:B_2=(H-y+x)^2:x^2$ slijedi $B=\left(\frac{m\sqrt{B_2}+n\sqrt{B_1}}{m+n}\right)^2$.

194. $P = 56$.

195. $EF = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 4$ (sl. 128); $EG = \sqrt{H^2 + EF^2} = 5$; tražena površina je $P = \frac{(a+c)\,EG}{2} = 20$.



Sl. 128

196. Osnovicu AB trougla (trokuta) ABC nalazimo iz proporcije $a : AB = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{(a-c)\sqrt{3}}{2}$; $AB = 3$; visinu h toga trougla dobijamo iz obrasca

$$h = \sqrt{H^2 + \left[\frac{(a-c)\sqrt{3}}{2} - \frac{(a-c)\sqrt{3}}{3}\right]^2} = \sqrt{H^2 + \left[\frac{(a-c)\sqrt{3}}{6}\right]^2} = \frac{\sqrt{579}}{2}.$$

Tražena površina je $P = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{3\sqrt{579}}{4}$.

197. a) H je visina jednakostraničnog trougla (trokuta) čija je stranica $a - c = 4$, pa je $H = \frac{(a-c)\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

b) H je visina jednakostraničnog trougla čija je stranica $(a-c)\sqrt{2}$, pa je $H = 2\sqrt{6}$.

198. a) Ako je H tražena visina, onda je $\frac{a-c}{2}$ visina jednakostraničnog trougla čija je stranica $2H$, tj. $\frac{a-c}{2} = \frac{2H\sqrt{3}}{2}$ ili $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) H je visina jednakostraničnog trougla čija je stranica $\frac{(a-c)\sqrt{2}}{2}$, pa je $H = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

199. a) H je visina jednakostraničnog trougla (trokuta) čija je stranica $x = \frac{(a-c)\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, pa je $H = \frac{x\sqrt{3}}{2} = 3$.

b) H je visina jednakostraničnog trougla čija je stranica $\frac{2(a-c)\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$, pa je $H = 6$.

200. Površina $P = a^2 + c^2 + 2h(a+c)$, a zapremina $V = \frac{H}{3}(a^2 + ac + c^2)$.

a) $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = 4$, $H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{7}$,

$P = 148$, $V = 28\sqrt{7}$

b) $H = 4$, $P = 210$, $V = 156$

c) $c = a - 2\sqrt{b^2 - h^2} = 1$, $H = 2\sqrt{7}$, $P = 394$, $V = 122\sqrt{7}$

d) $a = c + 2\sqrt{b^2 - h^2} = 12$, $H = \sqrt{119}$, $V = 484$, $V = \frac{172}{3}\sqrt{119}$

e) $h = 5$, $P = 256$, $V = 208$

f) $H = 4$, $P = 168$, $V = 112$.

201. Površina je $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3(a+c)h}{2}$ i zapremina

$V = \frac{H\sqrt{3}}{12}(a^2 + ac + c^2)$.

a) $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = 12$, $H = \sqrt{h^2 - \left[\frac{(a-c)\sqrt{3}}{6}\right]^2} = \frac{\sqrt{1221}}{3}$,

$P = 37\sqrt{3} + 252$, $V = \frac{43\sqrt{407}}{3}$

b) $b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = 5$, $H = \sqrt{13}$, $P = 60 + 17\sqrt{3}$, $V = 7\sqrt{39}$

c) Iz relacije $\frac{a-c}{2} = \sqrt{b^2 - h^2}$ je $c = a - 2\sqrt{b^2 - h^2} = 4$, $H = \sqrt{13}$,

$P = 84 + 29\sqrt{3}$, $V = 13\sqrt{39}$

d) $a = c + 2\sqrt{b^2 - h^2} = 15$, $H = 2\sqrt{13}$, $P = \frac{9}{2}(48 + 13\sqrt{3})$,

$V = \frac{93\sqrt{39}}{2}$

e) $h = \sqrt{H^2 + \left[\frac{(a-c)\sqrt{3}}{6}\right]^2} = 5$, $P = 192\sqrt{3}$, $V = 156\sqrt{3}$

f) $H = \sqrt{h^2 - \left[\frac{(a-c)\sqrt{3}}{6}\right]^2} = 12$, $P = 384\sqrt{3}$, $V = 516\sqrt{3}$.

202. Površina je $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3c^2\sqrt{3}}{2} + 3h(a+c)$, a zapremina

$V = \frac{H\sqrt{3}}{2}(a^2 + ac + c^2)$.

a) $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = 12$, $H = \sqrt{h^2 - \left[\frac{(a-c)\sqrt{3}}{2}\right]^2} = \sqrt{69}$,

$P = 504 + 222\sqrt{3}$, $V = 258\sqrt{23}$

b) $H = \sqrt{7}$, $P = 249\sqrt{3}$, $V = \frac{147}{2}\sqrt{21}$

c) $c = a - 2\sqrt{b^2 - h^2} = 2$, $H = \sqrt{69}$, $P = 504 + 222\sqrt{3}$, $V = 258\sqrt{3}$

d) $h = \sqrt{H^2 + \left[\frac{(a-c)\sqrt{3}}{2}\right]^2} = 13$, $P = 256\sqrt{3}$, $V = 344\sqrt{3}$.

203. Iz obrasca $V=\frac{H}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)$ dobijamo obrazac za zapreminu prizme ako uzmemo $B_1=B_2$. Tada je $V=B_1H$. Uzmemo li da je $B_2=0$, slijedi obrazac za zapreminu piramide $V=\frac{B_1H}{3}$.

204. Neka je a osnovna ivica (brid) i H visina; stranica c presjeka se dobija iz proporcije $a:c=H:\frac{H}{2}$; $c=10$; visine bočnih strana nastalih dijelova su jednake i iznose $h=13$: $P_1=c^2+2ch=360$, $P_2=a^2+c^2+2h(a+c)=1280$, $V_1=400$, $V_2=2800$.

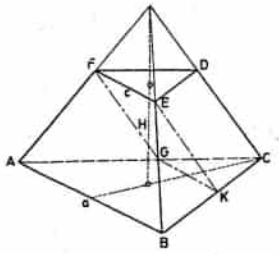
205. Ivica veće baze $a=30$ cm; visina bočne strane $h=26$ cm, pa je tražena površina $P=a^2+c^2+2h(a+c)=3080$ cm².

206. Ako je x ivica kocke onda je $a:x=H:(H-x)$ odakle $x=\frac{aH}{a+H}$. U našem slučaju $x=12$; $V_1:V_2=18:49$.

207. Ivica x prizme se dobija iz obrasca $x=\frac{aH}{a+H}=12$: $V_1:V_2=\frac{a^2H\sqrt{3}}{12}:\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=125:54$.

208. Kako je $B_1:B_2=16:1$, to je $B_1=16k$, $B_2=k$, pa je $V=\frac{H}{3}(16k+4k+k)=7kH$. a $V_2=B_2H=kH$; $V_1:V_2=7:1$.

209. Zapremina piramide je $V=\frac{49\sqrt{3}}{2}$. Prizma $CDEFGK$ (sl. 129) ima zapreminu $V=\frac{c^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{27\sqrt{3}}{2}$ a preostali dio je $V-V_1$ itd.



Sl. 129

210. Iz proporcija $a^2:c^2=9:1$ dobijamo da je $a:c=3:1$ odakle je $a=3k$, $c=k$; iz jednačine $\frac{4}{3}(a^2+ac+c^2)=156$ nalazimo $k=3$, pa je $a=9$, $c=3$. Tražena površina je $P=210$.

211. Iz proporcije $B_1:B_2=9:1$ slijedi $B_2=4$. Iz obrasca za zapreminu je visina $H=\frac{3V}{B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2}=6$, a visina dopunske piramide (dopune) $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}=3$. Tražena zapremina je $V=\frac{B_2x}{3}=4$.

212. Visina zarubljene piramide je $H=\frac{3V}{B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2}=3$ a visina dopunske piramide (dopune) $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}=1$. Zapremina dopunske piramide (dopune) iznosi $\frac{B_2H}{3}=\frac{1}{3}$ kubnih jedinica.

213. Kako je $H=48$, imamo sistem jednačina $16(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)=3904$, $B_1+B_2=16$ (1), pa je $\sqrt{B_1B_2}=80$ ili $B_1B_2=6400$. (2). Prema (1) i (2) vidimo da su B_1 i B_2 rješenja kvadratne jednačine (jednadžbe) $x^2-164x+6400=0$. Kako je $x_1=100$, $x_2=64$, to je $B_1=100$ i $B_2=64$.

214. $B_1:B_2=a^2:c^2$ (zašto?) odakle je $B_2=16$. Visina dopunske piramide (dopune) je $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}=96$, pa je tražena zapremina $V=512$ kubnih jedinica.

215. Visina zarubljene piramide je $H=\frac{3V}{B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2}$, a visina dopunske piramide $x=\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$. Tražena zapremina je

$$V=\frac{B_1(H+x)}{3}=\frac{B_1}{3}\left(H+\frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}\right)=\frac{HB_1}{3}\cdot\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}=$$

$$=\frac{B_1}{3}\cdot\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}\cdot\frac{3V}{B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2}=\frac{VB_1\sqrt{B_1}}{(\sqrt{B_1})^3-(\sqrt{B_2})^3}=$$

$$=V\cdot\frac{B_1\sqrt{B_1}}{B_1\sqrt{B_1}-B_2\sqrt{B_2}}\cdot\frac{B_1\sqrt{B_1}+B_2\sqrt{B_2}}{B_1\sqrt{B_1}+B_2\sqrt{B_2}}=V\cdot\frac{B_1^3+B_1B_2\sqrt{B_1B_2}}{B_1^3-B_2^3}.$$

216. Iz sistema: $\frac{(d_1+d_2)H}{2}=132$, $\left(\frac{d_1-d_2}{2}\right)^2=b^2-H^2$ nalazimo $d_1=16$, $d_2=6$, pa je $V=\frac{H}{3}\left(\frac{d_1^2}{2}+\frac{d_1d_2}{2}+\frac{d_2^2}{2}\right)$; $V=776$.

217. 27.

218. Ako je B baza piramide, H visina a B_1 i B_2 površine presjeka, onda iz proporcije $B:B_1=H^2:\left(\frac{2}{3}H\right)^2$ slijedi $B_1=\frac{4}{9}B$; analogno je $B_2=\frac{B}{9}$; $V_1=\frac{H}{9}(B+\sqrt{BB_1}+B_1)=\frac{19HB}{27}$; $V_2=\frac{H}{9}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)=\frac{7HB}{27}$; $V_3=\frac{B_2H}{9}=\frac{HB}{27}$; $V_1:V_2:V_3=19:7:1$.

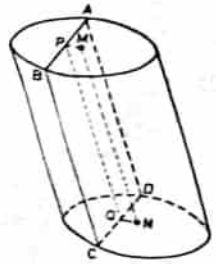
219. $\frac{H\sqrt{3}}{2}(a^2+ac+c^2)=228\sqrt{3}$, $c=4$, $H=6$, pa dobijamo jednačinu $a^2+4a-60=0$. Smisla ima samo rješenje $a=6$.

220. Iz sistema $\frac{6}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)=84\sqrt{3}$, $B_1+B_2=30\sqrt{3}$ nalazimo $B_1B_2=432$, pa su B_1 i B_2 rješenja jednačine $x^2-30x\sqrt{3}+432=0$ odakle je $x_1=24\sqrt{3}$, $x_2=6\sqrt{3}$. Iz jednačine $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$ nalazimo $a=4$ i, analogno, $c=2$.

7. Cilindar (valjak)

221. Cilindrična ploha (površ) kojoj je ta prava osa (os).

222. $AB \parallel CD$ jer ravan siječe dvije paralelne ravni u paralelnim pravama. Ravan koja prolazi kroz osu MN (sl. 130) i normalna je na ravan presjeka, siječe taj presjek u pravoj $PQ \parallel MN$. Kako je $MP=NQ$ (kao suprotne stranice paralelograma), jednake su i pripadne tetive $AB=CD$ itd.



Sl. 130

223. Svi takvi presjeci su pravougaonici (pravokutnici) jednakih visina (H), a razlikuju se u osnovici. Osni presjek ima za osnovicu $2r$ a svi ostali presjeci, ukoliko su paralelni sa osom, imaju za osnovicu tetivu. Međutim, tetiva je uvijek kraća od prečnika dijametra, itd.

224. Svi osni presjeci su paralelogrami iste osnovice $2r$, pa njihove površine zavise samo od visine. Najkraću visinu H ima karakterističan presjek a najdužu h onaj koji je na ovome normalan. Za visinu v svakog od ostalih presjeka važi $H<v<h$ itd. (Nacrtajte sliku!)

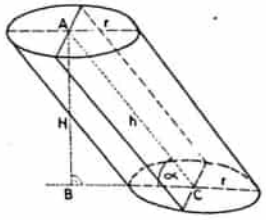
225. Presjek je pravougaonik (pravokutnik) čije su stranice a i H. Tada je $aH=120$ i $a^2+H^2=289$. Iz ovih jednačina slijedi $a^2+2aH+H^2=529$, tj. $(a+H)^2=529$, odnosno, $a+H=23$. Iz jednačina $a+H=23$ i $aH=120$ vidimo da su a i H rješenja jednačine $x^2-23x+120=0$, odakle je $x_1=15$ i $x_2=8$. Prema tome, imamo dva rješenja: $a_1=15$, $H_1=8$ i $a_2=8$, $H_2=15$. U prvom slučaju radijus r_1 baze nalazimo iz jednačine $r_1=\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2+c^2}=\frac{\sqrt{261}}{2}$, a u drugom slučaju je $r_2=5$.

226. $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$.

227. U udaljenosti $\frac{3}{5}r$ gdje je r radijus baze valjka.

228. Ako je a stranica romba, onda je $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$ a odavde $a=6$; $r=3$, $H=3\sqrt{3}$.

229. Oba presjeka su paralelogrami koji imaju jednaku osnovicu $(2r)$, pa se njihove površine odnose kao i visine. Prema tome je $H:h=1:2$ (sl. 131) što pokazuje da je $\triangle ABC$ jednak polovini jednakostraničnog trougla (trokuta) kome je stranica h. Zaključujemo da je $\alpha=30°$.



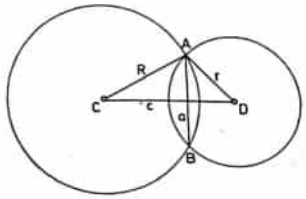
Sl. 131

230. U prvom slučaju treba da je $2r>a\sqrt{2}$ a u drugom $2r>a\sqrt{3}$ gdje je a ivica (brid) kocke.

231. a) $1:2$ b) $\sqrt{3}:2$ c) $\sqrt{2}:2$.

232. Presjek je pravougaonik (pravokutnik) kome je osnovica a jednaka tetivi kruga koja je udaljena od centra za $d=2\cdot 2=4$, a visina $h=2H=20$. Tetivu možemo izračunati iz obrasca $a=2\sqrt{r^2-d^2}=6$. Tražena površina iznosi 120 kvadratnih jedinica.

233. Projekciju figure na ravan (ravninu) baze prikazuje slika 132. Ako je $AB=2a$, onda je površina traženog presjeka $P=2aH$. Pri tome je a visina trougla (trokuta) ACD. Tu visinu možemo izračunati iz površine toga trougla a ovu nalazimo pomoću Heronova obrasca. Površina iznosi 264 cm². Iz jednačine $\frac{ac}{2}=264$ cm², gdje je $c=15$ cm, slijedi $a=\frac{176}{5}$ cm, pa je tražena površina $P=2aH=1760$ cm².



Sl. 132

234. a) $H=\frac{M}{2\pi r}=5$, $B=r^2\pi=4\pi$, $P=2r\pi(r+H)=28\pi$, $V=20\pi$

b) $H=\frac{P-2r^2\pi}{2r\pi}=5$, $M=30\pi$, $B=9\pi$, $V=45\pi$

c) $H=\frac{V}{r^2\pi}=3$, $P=20\pi$

d) Iz sistema $2r\pi H=12\pi$, $r^2\pi=4\pi$ slijedi $r=2$, $H=3$; $V=12\pi$.

e) $r=3$, $H=4$, $P=42\pi$

f) $M=8\pi$, $r=4$, $H=1$, $V=16\pi$

g) $r=3$, $H=2$, $P=30\pi$.

235. Iz jednačine $6r^2\pi=24\pi$ nalazimo $r=2$; $V=16\pi$.

236. Iz jednačine $2\pi(r+x)^2+2\pi\cdot 2r(r+x)=8\cdot 6r^2\pi$ nalazimo $x=3r$.

237. $6(r+x)^2\pi=9\cdot 6r^2\pi$; iz jednačine $x^2+2rx-8r^2=0$ slijedi $x=2r$.

238. a) $6r^2\pi=P$, $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$; $V=2r^3\pi=\frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ b) $P=\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

239. Ako cilindri imaju jednake baze, onda su njihove zapremine proporcionalne s visinama. Prema tome je $V_2=108\pi$.

240. $r=\frac{3}{5}H$, $r^2\pi H=360\pi$; $r=6$, $H=10$, $P=192\pi$.

241. Iz sistema $2r\pi H:(2r^2\pi+2r\pi H)=3:5$, $H=r+9$ slijedi $r=18$, $H=27$; $V=8748\pi$.

242. Iz sistema $2r^2\pi+2r\pi H=224\pi$, $2r:H=8:3$ slijedi $r=8$ cm, $H=6$ cm; $V=384\pi$ cm³.

243. 2, 4, 6.

244. Iz sistema $2r\pi(r+H)=32\pi$, $r:H=1:3$ nalazimo $r=2$, $H=6$; $V=24\pi$ kubnih jedinica.

245. Iz sistema $2r^2\pi+2r\pi H=P$, $2r\pi H=M$ slijedi $r=\sqrt{\frac{P-M}{2\pi}}$,

$H=\frac{M}{\sqrt{2\pi(P-M)}}$.

246. Ako je x radijus baze a y visina prvog valjka, onda je $2x^2\pi+2xy\pi+2y^2\pi+2xy\pi=200\pi$, $x^2y\pi+xy^2\pi=240\pi$, tj. $x+y=10$, $xy=24$; rješenja su $x_1=6$, $y_1=4$ i $x_2=4$, $y_2=6$. Površine se razlikuju za 40π a zapremine za 48π.

247. Ako je a ivica (brid) kocke, onda je $V_1=\frac{a^3\pi}{4}$ a $V_2=\frac{a^3\pi}{2}$; $V_1:V_2=1:2$.

248. Ako je a ivica (brid) prizme, onda je zapremina upisanog valjka $V_1=\frac{a^3\pi}{12}$ a opisanog $V_2=\frac{a^3\pi}{3}$; $V_1:V_2=1:4$.

249. Radijus baze upisanog cilindra je $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=4$ a opisanog $R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{65}{8}$; $V_1=16\pi H$; $V_2=\frac{4225}{64}\pi H$; $V_1:V_2=1024:4225$.

250. Ako su a i b katete trougla, onda je $a:b=3:4$ i $ab=192$; odavde je $a=12$, $b=16$; hipotenuza $c=20$; $V_1:V_2=4:25$.

251. Iz jednačine $2r\pi(r+H)=r^2\pi H$ nalazimo $H=\frac{2r}{r-2}$; zadatak ima smisla ako je $r>2$.

252. Zapremine se odnose kao površine baza. Baza manjeg dijela je $B_1 = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ a većeg $B_2 = r^2\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$;
$V_1 : V_2 = (4\pi - 3\sqrt{3}) : (8\pi + 3\sqrt{3})$.

253. Ako je l luk na bazi cilindra koji leži između tih ravni (ravnina), onda je tražena površina $P = H(2r + l) + \frac{2r^2\pi}{12} = 480 + 136\pi$,

$V = \frac{r^2\pi H}{12} = 480\pi$.

254. a) Iz relacije $2\pi r_1 H_1 + 2\pi r_2 H_2$ slijedi $r_1 H_1 = r_2 H_2$, pa je $V_1 : V_2 = r_1^2\pi H_1 : r_2^2\pi H_2 = r_1(r_1 H_1) : r_2(r_2 H_2) = r_1 : r_2$.

b) Iz relecije $r_1^2\pi H_1 = r_2^2\pi H_2$ slijedi $r_1(r_1 H_1) = r_2(r_2 H_2)$, tj. $r_1 H_1 : r_2 H_2 = r_2 : r_1$, pa je $M_1 : M_2 = 2\pi r_1 H_1 : 2\pi r_2 H_2 = r_2 : r_1$.

255. Ako je e duža dijagonala romba a r radijus baze cilindra, onda je $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 4r^2$, $2rH = \frac{de}{2}$. Odavde $r^2 = \frac{d^4}{16(d^2 - H^2)}$, pa je $V = \frac{d^4\pi H}{16(d^2 - H^2)}$.

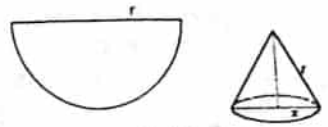
256. Druga dijagonala je $e = \frac{2P}{d}$. Radijus baze cilindra $r = \frac{\sqrt{d^4 + 4P^2}}{4d}$.

Visina valjka $H = \frac{de}{4r}$. Tražena zapremina je $V = \frac{P\pi\sqrt{d^4 + 4P^2}}{8d}$.

8. Konus (kupa, stožac)

257. Konusna površina.

258. Ako je x radijus baze nastalog konusa, onda je $2x\pi = r\pi$, tj. $x = \frac{r}{2}$ (sl. 133). Međutim, r je izvodnica (stranica) konusa, pa je osni presjek konusa zaista jednakostraničan trougao (trokut).



Sl. 133

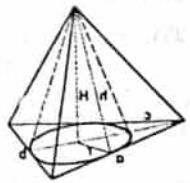
259. $r = 5k$, $H = 12k$ a izvodnica (stranica) $s = 13k$. Prema obrascu za dužinu kružnog luka $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ je $10k\pi = \frac{13k\pi\alpha}{180}$ odakle je $\alpha = \left(138\frac{6}{13}\right)^\circ \approx 138^\circ 30'$.

260. a) Ako je r radijus kruga u kome ravan presijeca konus, onda je $R : H = r : \frac{H}{3}$ odakle $r = \frac{R}{3}$, pa se površine odnose kao 1 : 9.

b) $r = \frac{2R}{3}$; 4 : 9.

261. Radijus presjeka je $r = 10$. Ako je x tražena udaljenost, onda je $15 : 12 = 10 : (12 - x)$; odavde je $12 : (12 - x) = 15 : 10$, $(12 - 12 + x) : 12 = (15 - 10) : 15$; $x : 12 = 5 : 15$, $x : 4 = 1 : 1$ tj. $x = 4$.

262. Ako su osnovne ivice piramide a, b i c (sl. 134) a visina bočne strane h, onda je $\frac{ah}{2} = P_1$, $\frac{bh}{2} = P_2$, $\frac{ch}{2} = P_3$, pa je $a : b : c = P_1 : P_2 : P_3 = 13 : 14 : 15$; odavde $a = 13k$, $b = 14k$, $c = 15k$. Zamjenom u obrascu $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 336$ nalazimo $k = 2$, pa je $a = 26$, $b = 28$, $c = 30$.



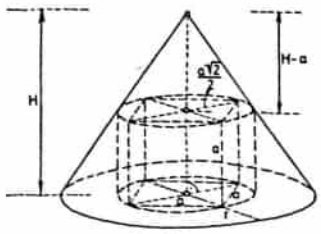
Sl. 134

Radijus baze konusa je $r = \frac{B}{s} = 8$; $h = 10$. Visina konusa je $H = \sqrt{h^2 - r^2} = 6$.

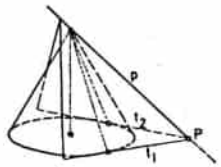
263. Ako je a ivica (brid) kocke, onda je (sl. 135) $2r : a\sqrt{2} = H : (H-a)$; odavde je $a = 2\sqrt{2}$.

264. Ako je a ivica prizme, onda je $r : \frac{a\sqrt{3}}{3} = H : (H-a)$; odavde je $a = \sqrt{3}$.

265. Iz relacije $r : a = H : (H-a)$ slijedi $a = 12$.



Sl. 135



Sl. 136

266. Dvije. Neka prava p prodire kroz ravan baze konusa u nekoj tački P (sl. 136). Iz tačke P možemo povući dvije tangente t_1 i t_2 na bazu konusa. Prave p i t_1 određuju jednu dodirnu ravan, a p i t_2 drugu.

267. Svi osni presjeci (sl. 137) su trouglovi jednake osnovice $2r$ pa im površine zavise od visine. Ako je v visina karakterističnog presjeka AKL, h visina presjeka AEF koji je na ovome normalan a x visina bilo kojeg presjeka AGH, onda je $v < x < h$ itd.

268. Tačka C (sl. 137) je nožište visine karakterističnog presjeka AKL a B je nožište visine onog osnog presjeka AEF koji je normalan na karakteristični presjek. Tačka D je nožište visine nekog od ostalih osnih presjeka AGH. Kako je $DA \perp GH$, to je i $CD \perp GH$ pa je $\sphericalangle BDC = 90°$. Sve tačke D leže na kružnici, pa je traženo geometrijsko mjesto tačaka ona kružnica čiji je dijametar BC.

269. a) $1:2$ b) $\sqrt{2}:2$ c) $\sqrt{3}:2$.

270. $14\sqrt{37}$ i 84.

271. a) $s = \sqrt{H^2 + r^2} = 13$; $P = r\pi(r+s) = 90\pi$, $V = 100\pi$

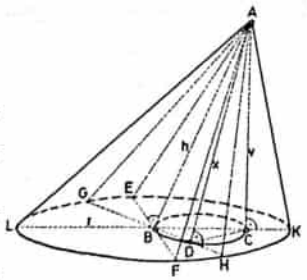
b) $P = 96\pi$, $V = 96\pi$

c) $r = 3k$; $P = 24k^2\pi$, $V = 12k^3\pi$

d) $s = \frac{M}{r\pi} = 10$, $P = 96\pi$, $V = 96\pi$

e) $r = \frac{M}{\pi s} = 10$, $P = 360\pi$, $V = 800\pi$

f) $r = \sqrt{\frac{B}{\pi}} = 3$, $P = 24\pi$, $V = 12\pi$



Sl. 137

g) $s = \frac{P}{r\pi} - r = 5$, $H = 4$, $V = 12\pi$

h) $r = \frac{-\pi s + \sqrt{\pi^2 s^2 + 4\pi P}}{2\pi} = 6$, $H = 8$, $V = 96\pi$

i) $H = \frac{3V}{r^2\pi} = 3$, $s = 5$, $P = 36\pi$

j) $r = \sqrt{\frac{3V}{H\pi}} = 3$, $s = 5$, $P = 24\pi$.

272. $P = \pi H^2$, $V = \frac{\pi H^3}{9}$.

273. Iz sistema jednačina $\frac{r^2\pi H}{3} = 9\pi\sqrt{3}$, $r\pi s = 2r^2\pi$, $s^2 = r^2 + H^2$ slijedi $s = 2r$, $H = r\sqrt{3}$, pa iz prve jednačine dobivamo: $r = 3$; $H = 3\sqrt{3}$.

274. Ako je r radijus baze konusa, onda je $M = r^2\pi\sqrt{2}$ a $V = \frac{r^3\pi}{3}$ gdje je $r = \frac{O}{2\pi} = 3$; $M = 9\pi\sqrt{2}$; $V = 9\pi$.

275. 243π kubnih jedinica.

276. Ako je r radijus baze cilindra, a R konusa, onda je $4r^2 = R^2\sqrt{3}$ odakle je $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, pa je $V_1 : V_2 = 2r^3\pi : \frac{R^3\pi\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} : 4$.

277. Ako je r radijus baze cilindra a R konusa, onda je $4r^2 : R^2\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$ odakle je $R = 2r$; $P_1 : P_2 = 4r^2\pi : 2R^2\pi = 1 : 2$; $V_1 : V_2 = 2r^3\pi : \frac{R^3\pi\sqrt{3}}{3} = 3 : 4\sqrt{3} = \sqrt{3} : 4$.

278. a) Ako je r radijus baze cilindra a R konusa, onda je $6r^2\pi = 3R^2\pi$ odakle je $R = r\sqrt{2}$, pa je $V_1 : V_2 = 2r^3\pi : \frac{R^3\pi\sqrt{3}}{3} = 3 : \sqrt{6} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

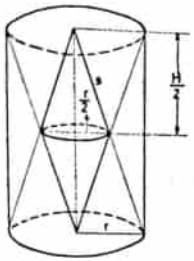
b) Iz jednačine $2r^3\pi = \frac{R^3\pi\sqrt{3}}{3}$ slijedi $R = r\sqrt[6]{12}$, pa je $P_1 : P_2 = 2 : \sqrt[6]{12} = \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3}$.

279. Iz jednačine $2R^3\pi = \frac{d^3\pi\sqrt{3}}{24}$ slijedi $R = \frac{d}{2\sqrt[6]{12}}$, pa visina cilindra iznosi $\frac{d}{\sqrt[6]{12}} = \sqrt[6]{12^3} = 2\sqrt[6]{3888}$.

280. Iz sistema jednačina $r:h=8:15$, $R:H=1:17$, $r\pi\sqrt{r^2+h^2}=2R\pi H$ slijedi $r=4R$, $h=\frac{15}{2}R$. Uz to je $H=17R$; $V_1:V_2=\frac{r^2\pi h}{3}:R^2\pi H=$ $=40:17$.

281. a) $M_1=r\pi\sqrt{r^2+H^2}$, $M_2=2r\pi H$, pa je $M_1:M_2=\sqrt{r^2+H^2}:2H$.
b) i c) ne može postojati, jer bi u oba slučaja bilo $H=\sqrt{r^2+H^2}$, što je nemoguće za $r\neq 0$.

282. Tijelo se sastoji od dva konusa (sl. 138) sa zajedničkom bazom radijusa $\frac{r}{2}=9$ i visine $\frac{H}{2}=12$; $s=15$; $P=270\pi$; $V=648\pi$.



Sl. 138

283. a) Ako je r radijus baze nastalog konusa, onda je $2r\pi=\frac{1}{6}\cdot 2a\pi$ odakle $r=\frac{a}{6}$, $H=$ $=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{6}\right)^2}=\frac{a}{6}\sqrt{35}$; $V=\frac{a^3\pi}{648}\sqrt{35}$.

b) $r=\frac{a}{4}$, $V=\frac{a^3\pi}{192}\sqrt{15}$.

c) Nastaje jednakostrani konus; $V=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$.

284. Iz sistema jednačina $r\pi(r+s)=90\pi$, $s=2r+3$ izlazi $r^2+r-30=0$; smisla ima samo rješenje $r=5$; $s=13$, $H=12$; $V=100\pi$.

285. a) $V=200$ cm³ b) 400 cm³.

286. Radijus baze cilindra $r=\frac{R}{2}$; $V_1:V_2=8:3$.

287. Visina bočne strane piramide je $h=13$ a bočna ivica $b=\sqrt{194}$;
a) $13:2\sqrt{97}$ b) $1:2$.

288. a) $M_1:M_2=\sqrt{12H^2+a^2}:4\sqrt{3H^2+a^2}$ b) $1:4$.

289. $1:3$.

290. Ako je r radijus baze, onda je $h=r+1$ a $s=r+2$. Iz jednačine $r^2\pi+r\pi(r+2)=24\pi$ slijedi $r=2$; $V=12\pi$.

291. $P_1=\frac{r^2\pi}{3}(3+2\sqrt{3})$, $P_2=3r^2\pi$; $V_1=\frac{r^3\pi\sqrt{3}}{9}$, $V_2=\frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

292. Iz sistema jednačina $r\pi(r+s)=2\frac{r^2\pi H}{3}$, $s:r=5:3$, $s^2=r^2+H^2$ slijedi $H=4$, $r=3$, $s=5$; $V=12\pi$, $V=\frac{9}{2}\pi$; $V=\frac{8}{3}V$.

293. $\frac{r^3\pi\sqrt{3}}{6}$.

294. Pomoću Heronove formule nađe se površina karakterističnog presjeka $P=36$, a iz ove slijedi visina konusa $H=\frac{P}{r}=\frac{36}{5}$; $V=60\pi$.

9. Zarubljeni konus (zarubljena kupa, krnji stožac)

295. Ako je x visina dopunske piramide, onda je $R:r=(H+x):x$, ili, $(R-r):r=H:x$, tj. $x=\frac{Hr}{R-r}=3$; traženi radijus $\varrho=\frac{R}{2}=4$.

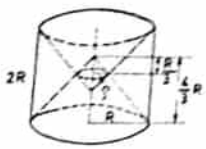
296. a) Ako je ϱ radijus presjeka, onda je $(R-\varrho):(R-r)=x:H$, gdje je $\varrho^2\pi=\sqrt{R^2\pi\cdot r^2\pi}$, tj. $\varrho=\sqrt{Rr}$; $x=\frac{H(R-\sqrt{Rr})}{R-r}$.

b) Kako je $\varrho^2\pi=\frac{1}{2}(R^2\pi+r^2\pi)$, tj. $\varrho=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}$, to je $x=\frac{H}{R-r}\left(R-\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}\right)$.

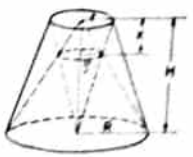
c) Kako je $\varrho^2\pi=\frac{2R^2\pi\cdot r^2\pi}{R^2\pi+r^2\pi}$, to je $\varrho=\frac{Rr\sqrt{2}}{\sqrt{R^2+r^2}}$, pa je $x=\frac{H}{R-r}\left(R-\frac{Rr\sqrt{2}}{\sqrt{R^2+r^2}}\right)$.

297. Ako je visina konusa H a dopunske piramide x, onda je $B_1:B_2=(H+x)^2:x^2$ odakle $x=\frac{H}{3}$. Jedan od presjeka B_3 nalazimo iz relacije $B_1:B_3=(H+x)^2:\left(\frac{2}{3}H+x\right)^2$; $B_3=9$; drugi presjek B_4 nalazimo iz relacije $B_1:B_4=(H+x)^2:\left(\frac{1}{3}H+x\right)^2$; $B_4=4$.

298. Iz proporcije (sl. 139) $R:\varrho=\frac{4R}{3}:\frac{R}{3}$ slijedi $\varrho=\frac{R}{4}$.



Sl. 139



Sl. 140

Sl. 141

299. Traži se radijus ϱ (sl. 140). Kako je $R:\varrho=H:x$ i $r:\varrho=H:(H-x)$, to je $x=\frac{H\varrho}{R}$ a $\varrho=\frac{Rr}{R+r}$.

300. Iz relacija $R:\varrho=H:x$, $r:\varrho=\frac{H}{2}:\left(\frac{H}{2}-x\right)$ (sl. 141) izlazi $\varrho=\frac{rR}{R+2r}$.

301. Visina piramide (i konusa) $H=\sqrt{c^2-\left[\frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}\right]^2}=4$. Tražena izvodnica je $s=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}-b}{2}\right)^2}=5$.

302. $s=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)^2}=5$.

303. a) $s=\sqrt{H^2+(R-r)^2}=5$, $P=R^2\pi+r^2\pi+\pi s(R+r)=80\pi$, $V=\frac{H\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)=52\pi$

b) $H=12$, $P=170\pi$, $V=268\pi$

c) $r=R-\sqrt{s^2-H^2}=3$, $P=210\pi$, $V=312\pi$

d) $R=r+\sqrt{s^2-H^2}=10$, $P=308\pi$, $V=620\pi$.

304. a) $\frac{455\pi}{3}$ b) 91π c) $\frac{273\pi}{5}$.

305. $s=\frac{P-R^2\pi-r^2\pi}{\pi(R+r)}=13$, $H=12$, $V=268\pi$.

306. Ako u jednačini $P=R^2\pi+r^2\pi+\pi s(R+r)$ zamijenimo veličine P, R i s, slijedi $r^2+17r-38=0$ odakle $r=2$; $H=15$, $V=620\pi$.

307. Iz sistema jednačina $R-r=3$, $5(R+r)=R^2+r^2$ slijedi $r=3$, $R=6$; $H=4$; $V=84\pi$.

308. Treba uzeti u obzir da je $s=2(R-r)=12$ (zašto?) i $H=\frac{s\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$; $V=234\pi\sqrt{3}$.

309. Iz sistema $R^2\pi+r^2\pi+\pi s(R+r)=71\pi$, $2(R-r)=s=6$ slijedi $R=5$, $r=2$; $V=39\pi\sqrt{3}$.

310. Ako su x i y radijusi baza nastalog konusa, onda je $2x\pi=R\pi$ i $2y\pi=r\pi$ odakle $x=5$, $y=2$. Izvodnica $s=R-r=6$, pa je visina konusa $H=\sqrt{(R-r)^2-(x-y)^2}=3\sqrt{3}$. Zapremina je $V=39\pi\sqrt{3}$. Budući da je $x-y=\frac{s}{2}$, to je $\alpha=60°$.

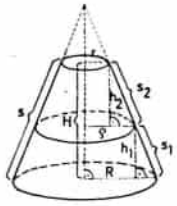
311. Iz sistema $R^2+Rr+r^2=21$, $R^2+r^2=17$ slijedi $2Rr=8$, pa je $R^2+2Rr+r^2=25$ i $R^2-2Rr+r^2=9$. Odavde je $R+r=5$, $R-r=3$ pa je $R=4$, $r=1$; $s=5$; $P=42\pi$. U konus se može upisati sfera jer je osni presjek ovog konusa tangentni četvorougao.

312. $R^2\pi=36r^2\pi$, pa je $R=6r$; $\pi s(R+r)=70r^2\pi$ odakle $s=10r$; kako je $R-r=5r=\frac{s}{2}$, traženi ugao je $60°$ (zašto?).

313. Ako je r radijus presječnog kruga, s_1 izvodnica zarubljenog konusa, a s_2 dopunskog konusa, onda je $\pi s_1(6+r)=30\pi$, $r\pi s_2=30\pi$, $s_1+s_2=10$. Odavde je $r=3\sqrt{2}$, $s_1=5(2-\sqrt{2})$, $s_2=5\sqrt{2}$. Pripadne visine su $h_1=8-4\sqrt{2}$, $h_2=4\sqrt{2}$, a tražena zapremina je $V=24\pi(4-\sqrt{2})$.

314. Izvodnica zadanog konusa $S=26$, pa je njegov omotač $M=260\pi$. Ako je r radijus presječnog kruga a s izvodnica nastalog zarubljenog konusa, onda je $(R+r)\pi s=130\pi$ i $R:r=S:(S-s)$; odavde je $r=5\sqrt{2}$. Ako je x visina zarubljenog konusa, onda je $R:r=H:(H-x)$ odakle $x=24-12\sqrt{2}$, pa je tražena zapremina $V=200(4-\sqrt{2})$.

315. Izvodnica konusa $s=\sqrt{H^2+(R-r)^2}=10$, pa je omotač $M=120\pi$. Ako je ϱ radijus presječnog kruga (sl. 142) a s_1 i s_2 izvodnice nastalih dijelova, onda je $s_1(9+\varrho)=60$, $s_2(3+\varrho)=60$, $s_1+s_2=10$. Odavde nalazimo $\varrho=3\sqrt{5}$, $s_1=5(3-\sqrt{5})$, $s_2=5(\sqrt{5}-1)$. Pripadne visine su $h_1=\sqrt{s_1^2-(R-\varrho)^2}=4(3-\sqrt{5})$ i $h_2=4(\sqrt{5}-1)$; $V_1=12\pi(27-5\sqrt{5})$, $V_2=12\pi(5\sqrt{5}-1)$.



Sl. 142

316. Ako je x udaljenost presjeka od baze (R), onda je $\frac{x\pi}{3}(R^2+R\varrho+\varrho^2)=\frac{H\pi}{6}(R^2+Rr+r^2)$, $(R-\varrho):x=(R-r):H$; odavde je $x=\frac{H(R-\varrho)}{R-r}$ pa zamjenom u gornjoj jednačini dobivamo $\frac{H(R-\varrho)}{R-r}(R^2+R\varrho+\varrho^2)=\frac{H(R^2+Rr+r^2)}{2}$, tj. $R^3-\varrho^3=\frac{R^3-r^3}{2}$ pa je $\varrho=\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}$.

317. Ako je x udaljenost presjeka od baze konusa a s izvodnica nastalog zarubljenog konusa, onda je $s=2(R-r)$ a $x=(R-r)\sqrt{3}$. Kako je $(R+r)\pi s=R^2\pi$, slijedi $r=\frac{R}{\sqrt{2}}$ i $x=\frac{R\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$;

$V=\frac{R^3\sqrt{6}(2\sqrt{2}-1)}{12}$.

318. Ako je R radijus baze zadanog konusa a r i h radijus baze i visina dopunskog konusa (dopune), onda je $\frac{R^2\pi H}{3}=V_1+V_2$ odakle $R=5$ te $r:h=5:12$, $\frac{r^2\pi h}{3}=\frac{100\pi}{27}$; odavde je $r=\frac{5}{3}$, $h=4$. Izvodnica manjeg dijela $s_1=\frac{13}{3}$ a većeg $s_2=\frac{26}{3}$ pa je $M_1=r\pi s_1=\frac{65\pi}{9}$ i $M_2=\pi s_2(R+r)=\frac{520\pi}{9}$.

319. Izvodnica zadanog konusa $S=15$. Ako je r radijus kruga po kome je presječen konus, a s izvodnica nastalog zarubljenog konusa, onda je $\pi s(R+r):R\pi S=8:9$ i $s:(R-r)=S:R$; odavde je $r=3$, $s=10$. Visina zarubljenog konusa je $h=\sqrt{s^2-(R-r)^2}=8$; $V=312\pi$.

320. a) Greška je $V_1-V_2=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)-\frac{\pi H}{4}(R+r)^2=\frac{\pi H}{12}(R-r)^2$.

b) Za $r=0$ imamo slučaj običnog konusa, kada je greška $\frac{R^2\pi H}{12}$.

321. Zapremina cilindra $V=2R^3\pi$ a zapremina dvostrukog konusa $V_1=\frac{7R^3\pi}{6}$; $V_1=\frac{7}{12}V$.

322. a) Iz jednačine $\frac{R^2\pi x}{3}=\frac{r^2\pi(H-x)}{3}$ slijedi $x=\frac{r^2H}{R^2+r^2}$.

b) $247:72$.

323. Izvodnica odstranjenog konusa je $s=\sqrt{H^2+(R-r)^2}=15$; $P=r^2\pi+R^2\pi-(R-r)^2\pi+\pi s(R-r)+\pi s(R+r)=2R\pi(r+s)=374\pi$;
$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)-\frac{(R-r)^2\pi H}{3}=\pi HRr=264\pi$.

324. $\frac{V\pi}{12}(3+\sqrt{2})$.

10. Sfera, lopta (kugla)

325. Geometrijsko mjesto tačaka koje su podjednako udaljene od tačaka A, B i C je prava p u kojoj se sijeku simetralne ravni duži BC, CA i AB. Prema tome, uzmemo li simetralne ravni bilo koje dvije od te tri duži, one će odrediti pravu p. Simetralna ravan duži AD (ili BD ili CD) presjeći će pravu p u nekoj tački S koja je podjednako udaljena od sve četiri zadane tačke. Ona je centar sfere koju određuju četiri zadane tačke.

326. Odaberimo na kružnici k proizvoljne tri tačke B, C i D. Tačke A, B, C i D nisu komplanarne pa određuju sferu (vidite prethodni zadatak!)

327. Bilo koja ravan koja prolazi kroz pravu S_1S_2 presjeći će te dvije kružnice u četiri tačke A, B, C, D koje su vrhovi jednakokrakog trapeza. Oko takvog može se uvijek opisati kružnica čiji dijametar leži na pravoj S_1S_2. Rotacijom te kružnice oko prave S_1S_2 nastaće sfera. Pri toj rotaciji tačke A, B, C, D opisuju kružnice k_1 i k_2.

328. a) Baze cilindra su dva kruga čija je centralna udaljenost normalna na ravnima u kojima leže ti krugovi, a takvi krugovi jednoznačno određuju loptu (vidite prethodni zadatak!)

b) Kružnica (baze kupe) i tačka van ravni odgovarajućeg kruga (vrh kupe) određuju sferu. Svaki od preostalih zadataka c), d), g) može se svesti na jedan od slučajeva određenosti sfere iz zadataka 325. do 327.

329. Tačke A i B sfere i njezin centar određuju jednu i samo jednu ravan koja sferu presijeca u velikoj (glavnoj) kružnici koja prolazi tačkama A i B.

330. Te tri tačke nisu kolinearne i kao takve određuju ravan koja presijeca sferu u kružnici.

331. Sfera. Objasnite!

332. Cilindrična ploha (površ). **333.** Konusna ploha (površ).

334. Omotač (plašt) cilindra. Objasnite!

335. Omotač konusa kome je ta tačka vrh. Objasnite!

336. Omotači dvostrukog konusa kojima je ta tačka zajednički vrh. Objasnite!

337. Sve tri simetralne ravni duži BC, CA i AB sijeku se u nekoj pravoj p. Ako opišemo oko bilo koje od zadanih tačaka sferu radijusa R, ona će presjeći pravu p u centru tražene sfere. Zadatak može imati dva, jedno ili nema rješenja. Objasnite kada će nastupiti koji slučaj!

338. Ako je C centar zadane kružnice k a S centar sfere, onda centar S leži na normali kroz tačku C na ravan π s tim da je $SA = R$ gdje je A bilo koja tačka kružnice k. Zadatak može imati dva, jedno ili nema rješenja. Objasnite kada nastupa koji od tih slučajeva!

339. a) Simetralne ravni diedara toga triedra sijeku se u jednoj pravoj p koja prolazi kroz vrh triedra. U bilo kojoj tački A bilo koje strane triedra podignimo normalu u unutrašnjost triedra i na tu normalu nanesimo radijus sfere počevši od tačke A. Time dobijamo neku tačku B. Ravan, povučena kroz tačku B paralelno sa tom stranom triedra presjeći će pravu p u centru tražene sfere.
b) Simetralne ravni strana (ivičnih uglova) toga triedra sijeku se u nekoj pravoj p koja prolazi kroz vrh triedra. Oko bilo koje ivice triedra, uzete kao ose, konstruišimo kružnu cilindričnu plohu radijusa R. Ona će presjeći pravu p u centru tražene sfere.

340. Kroz centar S sfere položimo ravan $\pi \perp p$. Ta ravan sijeće pravu p u nekoj tački P a sferu u kružnici k. Iz tačke P povucimo u ravni π tangente t_1 i t_2 na kružnicu k. Prave p i t_1 određuju jednu, a p i t_2 drugu tangentnu ravan.

341. Centar S sfere leži na normali kroz tačku A na ravan π u udaljenosti $SA = R$. Zadatak ima dva rješenja.

342. Neka su r i R $(r<R)$ radiusi sfera. Odaberimo neku ravan koja je udaljena za $d\,(d<r)$ od zajedničkog centra obiju sfera a x i y radijusi kružnica u kojima ravan presijeca sfere; onda je površina kružnog prstena $P=(y^2-x^2)\pi$; međutim, $y^2=R^2-d^2$, $x^2=r^2-d^2$ pa je $P=(R^2-r^2)\pi$, tj. P je konstantna veličina.

343. $O=12\pi$, $P=36\pi$.

344. Ako je R radijus sfere a x centralna udaljenost ravni koja je bliža centru sfere, onda je $R^2=(d+x)^2+r_1^2$, $R^2=r_2^2+x^2$ odakle slijedi $R=10$.

345. Ako su d_1 i d_2 pomenute centralne udaljenosti, onda postoji sistem jednačina: $d_1:d_2=5:6$, $R^2=d_1^2+r_1^2$, $R^2=d_2^2+r_2^2$. Uzmemo li $d_1=5k$, $d_2=6k$, onda je $25k^2+225=36k^2+49$ odakle $k=4$, pa je $d_1=20$, $d_2=24$, $R=25$.

346. a) $R=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ b) Bočna ivica iznosi $b=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $R=\dfrac{a\sqrt{219}}{24}$.

347. Ako je a osnovna ivica piramide, onda je $2a$ njezina visina. Iz jednačine $(2a-R)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$ slijedi $a=\dfrac{12}{13}R$, pa tražena visina iznosi $\dfrac{24}{13}R$.

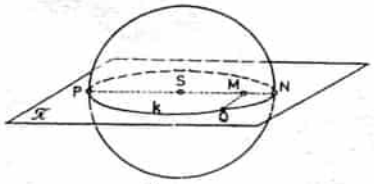
348. a) $R\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

349. Ako je r radijus upisane sfere, onda je $r=\frac{1}{2}(R-r)$ odakle slijedi $r=\frac{R}{3}$.

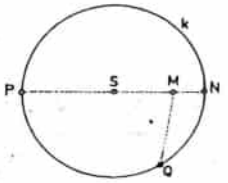
350. Visina bočne strane $h=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{34}}{6}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{5a}{6}$. Radijus sfere jednak je radijusu kruga upisanog u jednakokraki trougao osnovice a i kraka $\frac{5a}{6}$; $R=\frac{a}{4}$.

351. Ako je r radijus baze konusa, onda je $r:6R=R:(\sqrt{36R^2+r^2}-r)$; odavde $r=\frac{R\sqrt{6}}{2}$.

352. Neka je S centar sfere. Prava MS prodire kroz sferu u tačkama N i P (sl. 143a). Odaberimo na sferi bilo koju tačku Q različitu od tačaka N



Sl. 143a



Sl. 143b

i P. Tačke M, Q, S određuju neku ravan π koja presijeca sferu u kružnici k. Kako je $MN<MQ<MP$ zašto? (sl. 143b), to je N tačka sfere koja je najbliža tački M a P je tačka koja ima najveću udaljenost od tačke M.

353. Ako je $d=MS$ centralna udaljenost tačke M od centra sfere, onda je tražena ravan ona koja je normalna na MS (zašto?) a prolazi kroz tačku M.

354. Uzmimo da prava p prodire kroz sferu u tačkama A i B. Tada je je tetiva AB zajednička za sve kružnice u kojima ravni presijecaju sferu. Najmanja od tih kružnica je ona kojoj je AB dijametar (zašto?), a to je ona kružnica koja je dobivena pomoću ravni koja je normalna na ravan koju određuju tačke A, B i S gdje je S centar sfere. Šta je u slučaju ako prava p prolazi kroz centar sfere?

355. Centri S_1, S_2, S_3, S_4 prve četiri sfere se mogu smatrati bazom pravilne četvorostrane piramide a centar S_5 pete sfere je vrh te piramide. Zadatak se tako svodi na to da se izračuna udaljenost vrha S_5 te piramide od ravni na kojoj leže prve četiri sfere. Piramida je jednakoivična a ivica joj iznosi $2R$. Tražena udaljenost je $R(1+\sqrt{2})$.

356. Centri sfera su vrhovi pravilnog tetraedra čija je ivica $2R$. Tražena udaljenost iznosi $R\left(1+2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

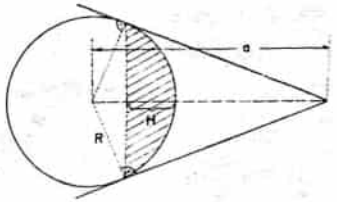
357. a) $P=16\pi$, $V=\frac{32}{3}\pi$ b) $P=48\pi$, $V=32\pi\sqrt{3}$.

358. Iz sistema $a:b:c=2:3:6$, $abc=2(bc+ca+ab)$ slijedi $a=4$, $b=6$, $c=12$; dijagonala paralelepipeda je $D=14$; površina lopte $P=196\pi$ a zapremina $V=\frac{1372\pi}{3}$.

359. $r_1:r_2:r_3=1:4:8$, $\frac{4\pi}{3}(r_1^3+r_2^3+r_3^3)=\frac{2308\pi}{3}$; $r_1=1$, $r_2=4$, $r_3=8$; $V=972\pi$.

360. $\sqrt{3}:16$.

361. a) Osvijetljeni dio sfere je kalota visine H (sl. 144). Iz relacije $d:R=R:(R-H)$ slijedi $H=\frac{R(d-R)}{d}$. Osvijetljeni dio ima površinu $P=\frac{2\pi R^2(d-R)}{d}$.



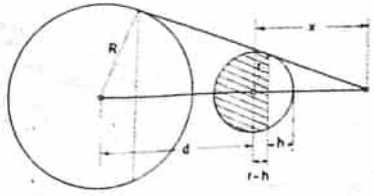
Sl. 144

b) Iz jednačine $\frac{2\pi R^2(d-R)}{d}=\frac{1}{n}\cdot 4R^2\pi$ nalazimo $d=\frac{nR}{n-2}$. Zadatak ima smisla ako je $n>2$. Za $n=2$ svjetlosni izvor je u beskonačnosti.

362. $P=\frac{2\pi R^2 H}{H+R}=\frac{2\pi\cdot 6370^2\cdot 60}{6430}\approx 2\,379\,000\ \text{km}^2$.

363. $d=2R$.

364. Iz proporcije $R:r=(d+x):x$ (sl. 145) slijedi $(R-r):r=d:x$ odakle $x=\frac{rd}{R-r}=\frac{25}{2}$. Iz proporcije $(r-h):r=r:x$ slijedi $h=r-\frac{r^2}{x}=3$, pa je osvijetljena površina $P=2r\pi(r+h)=80\pi$.



Sl. 145

365. Svaki dio iznosi trećinu površine sfere jer za $H=\frac{2R}{3}$ je $P=2R\pi H=\frac{4}{3}R^2\pi$.

366. Ako je H visina jedne kalote, onda je $2R-H$ visina druge, pa je $2R\pi(2R-H)=n\cdot 2R\pi H$. Odavde $H=\frac{2R}{n+1}$. Visina druge kalote je $\frac{2nR}{n+1}$.

367. Radijus sfere je $R=\frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ a površina $P=a^2\pi(2-\sqrt{3})$.

368. Imamo sistem jednačina $2r^2+2rH=3R^2$, $4r^2+H^2=4R^2$. Ako pomnožimo prvu jednačinu sa -4 a drugu sa 3 pa obje jednačine saberemo, slijedi $4r^2-8rH+3H^2=0$, odakle je $r=\frac{4\pm 2}{4}H$ itd. Dobivamo dva rješenja: $r_1=\frac{3R\sqrt{10}}{10}$, $H_1=\frac{R\sqrt{10}}{5}$ i $r_2=\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $H_2=R\sqrt{2}$.

369. Kod konusa je $H=6R$, $r=R\sqrt{\frac{3}{2}}$, $s=5R\sqrt{\frac{3}{2}}$; $P_1:P_2=4:9$, $V_1:V_2=4:9$.

370. Iz jednačine $r^2\pi=4R^2\pi$ slijedi $r=3$. Iz sistema jednačina $s^2-H^2=9$, $H:s=(s-r):(H-R)$ slijedi $s=5$, $H=4$; zapremina lopte odnosi se prema zapremini konusa kao $3:8$.

371. $P=\frac{400}{9}\pi$, $V=\frac{4000}{81}\pi$.

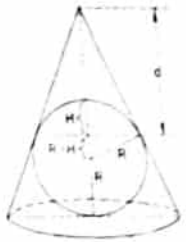
372. Rotacijom nastaje lopta, jednakostrani cilindar i jednakostrani konus; a) i b) daje isti rezultat i to: $4:6:9$.

373. $3r^2\pi=27\pi$, $r=3$, $V=18\pi$ kubnih jedinica.

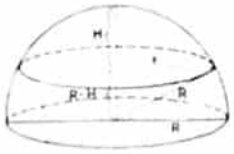
374. **a)** i **b)** $R^2:r^2$.

375. Ako je H visina kalote a r radijus kruga, onda je $2R\pi H=5r^2\pi$ i $r^2=R^2-(H-R)^2$. Odavde slijedi $H=8$, $r=4$.

376. Iz proporcije $(R-H):R=R:d$ slijedi $H=R-\frac{R^2}{d}=\frac{48}{5}$; $P_1:P_2=2\pi RH:2\pi R(2R-H)=1:4$ (sl. 146).



Sl. 146



Sl. 147

377. Iz jednačine (sl. 147) $r^2\pi+2R\pi H=R^2\pi+r^2\pi+2R\pi(R-H)$ slijedi $H=\frac{3}{4}R$.

378. $H=\frac{2}{17}R$.

379. Izvodnica konusa $s=\frac{5}{3}r$. Radijus sfere $R=\frac{r}{2}$. Površine se odnose kao $3:5$ a zapremine kao $3:8$.

380. Radijus baze konusa iznosi $r=5$, a radijus upisane lopte je $R=\frac{10}{3}$; $P=\frac{400\pi}{5}$; $V=\frac{4000\pi}{81}$.

381. **a)** Visina $H=\frac{R}{2}$ pa je $V=\frac{2}{3}R^2\pi H=\frac{R^3\pi}{3}$

b) $H=\frac{R(2-\sqrt{3})}{2}$, $V=\frac{R^3\pi(2-\sqrt{3})}{3}$

c) $H=\frac{R(2-\sqrt{2})}{2}$, $V=\frac{R^3\pi(2-\sqrt{2})}{3}$.

382. $R=6$.

383. **a)** Iz sistema $2R\pi H=r\pi R$, $r^2=2RH-H^2$ slijedi $H=\frac{2}{5}R$, pa je $V=\frac{4}{15}R^3\pi$ **b)** $\frac{12}{25}R^3\pi$ **c)** $\frac{2}{39}R^3\pi$.

384. Iz sistema $\frac{\pi H^2}{3}(3R-H)=\frac{r^2\pi(R-H)}{3}$ (sl. 23), $r^2=2RH-H^2$ slijedi $H^2-3RH+R^2=0$, odakle je $H=\frac{R(3\pm\sqrt{5})}{2}$. Kako H mora biti manje od $2R$, to dolazi u obzir samo $H=\frac{R(3-\sqrt{5})}{2}$. Tada je $V=\frac{R^3\pi}{6}(3-\sqrt{5})$ **b)** $\frac{R^3\pi}{9}(9-\sqrt{57})$ **c)** $\frac{R^3\pi}{15}(15-\sqrt{105})$.

385. Iz sistema $r^2\pi+2R\pi H=144\pi$ (sl. 21), $r^2=2RH-H^2$ slijedi $H=4$.

386. Iz sistema $\frac{\pi H^2}{3}(3R-H)=\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}R^3\pi H$, slijedi $H=\frac{2}{3}R$. (Vrijednost $H=\frac{7}{3}R$ ne dolazi u obzir.)

387. Ako je R radijus lopte, onda je $R=\sqrt{r^2+H^2}=13$. Traženа zapremina je $V=\frac{\pi}{3}(R-H)^2[3R-(R-H)]=\frac{38\pi}{3}$.

388. Visina segmenta je $H=\frac{R(2-\sqrt{3})}{2}$, pa je kalota $P=R^2\pi(2-\sqrt{3})$, zapremina $V=\frac{R^3\pi}{24}(16-9\sqrt{3})$.

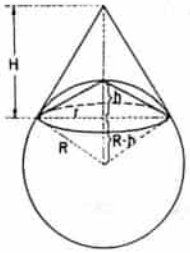
389. $V=\frac{a^3\pi}{12}(3\sqrt{3}-4)$.

390. $\frac{28\pi R^3}{81}$.

391. a) $P=352\pi$, $V=\frac{1984\pi}{3}$ b) $P=468\pi$, $V=2268\pi$.

392. a) $H=R$, $V=\frac{2\pi R^3}{3}$ b) $H=\frac{3}{2}R$, $V=\frac{9}{8}\pi R^3$.

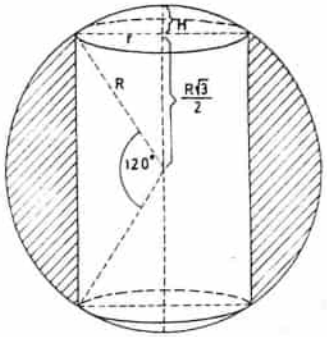
393. a) $H=R$ b) $H=\frac{3}{2}R$.



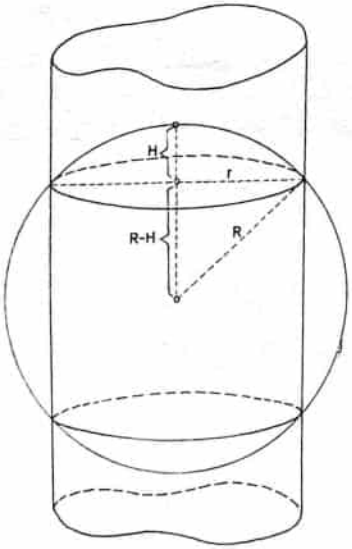
Sl. 148

394. Iz relacije $r^2=2Rh-h^2$ (sl. 148) slijedi $R=\frac{r^2+h^2}{2h}=\frac{17}{3}$. Visinu opisanog konusa dobivamo iz relacije $r^2=H(R-h)$ odakle $H=\frac{r^2}{R-h}$. Zapremina upisanog konusa, segmenta i opisanog konusa se odnose kao 200 : 336 : 625.

395. Kako je (sl. 149) $r=\frac{R}{2}$ i $H=\frac{R(2-\sqrt{3})}{2}$, tražena zapremina je $V=\frac{1}{2}\pi R^3\sqrt{3}$.



Sl. 149



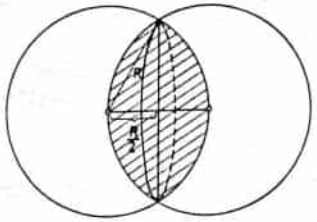
Sl. 150

396. $V=\frac{4}{3}R^3\pi-2r^2\pi(R-H)-\frac{2\pi H^2}{3}(3R-H)=\frac{16384\pi}{3}$ (sl. 150).

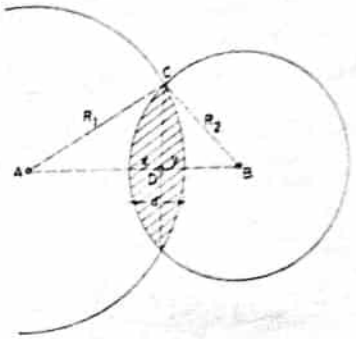
397. $V=135\pi$.

398. $\frac{\pi R^3}{3}$.

399. $\frac{5\pi R^3}{12}$ (sl. 151).



Sl. 151



Sl. 152

400. Radijus R sfere dobijamo iz jednačine $\left(R-\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2=R^2$; $R=10$; tražena zapremina je $V=\frac{224\pi}{3}$.

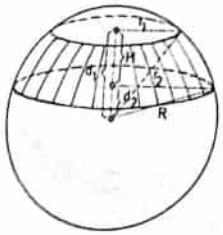
401. Kako je $AB=R_1+R_2-d=14$ (sl. 152), u trouglu ABC poznate su sve tri stranice pa time i površina $P=84$. Visina CD toga trougla može se odrediti pomoću obrasca $CD=\frac{2P}{AB}=12$; time su određene i veličine $AD=9$ i $BD=5$. Visine segmenata su $x=R_2-BD=8$ i $y=R_1-AD=6$. Tražena zapremina je $V=\frac{\pi y^2}{3}(3R_1-y)+\frac{\pi x^2}{3}(3R_2-x)=\frac{3388\pi}{3}$.

402. $V=\frac{\pi H^2}{3}(3r-H)-\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$; treba odrediti H i h. Udaljenost centara sfera je $AB=R-r+d$, pa je površina $\triangle ABC$ određena i iznosi $P=\sqrt{\left(R+\frac{d}{2}\right)\cdot\frac{d}{2}\cdot\left(R+\frac{d}{2}-r\right)\cdot\left(r-\frac{d}{2}\right)}$. Iz nađene površine možemo naći i visinu toga trougla $CD=\frac{2P}{AB}$ pa, prema tome, i $BD=\sqrt{r^2-CD^2}$. Visine segmenata su $H=r-BD$ i $h=H-d$.

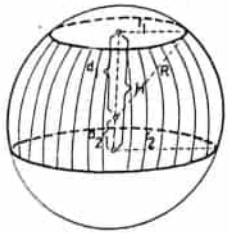
403. Radijus sfere je $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=6$. Površine kalota se odnose kao njihove visine. Ako je H visina jedne kalote, onda je $H:(2r-H)=1:3$, odakle $H=3$. Zapremine pripadnih odsječaka se odnose $V_1:V_2=$ $=\frac{\pi H^2}{3}(3r-H):\frac{\pi(2r-H)^2}{3}[3r-(2r-H)]=5:27.$

404. $V=\frac{\pi H}{6}(3r_1^2+3r_2^2+H^2)=\frac{632\pi}{3}.$

405. Razlikujemo dva slučaja: a) centar lopte ne leži u sloju (sl. 153); visina sloja je $H=d_1-d_2=8$; b) centar lopte leži u sloju; visina je $H=d_1+d_2=22$ (sl. 154). U svakom slučaju su radijusi graničnih



Sl. 153



Sl. 154

krugova: $r_1=\sqrt{R^2-d_1^2}=20$, $r_2=\sqrt{R^2-d_2^2}=24$. Tražene zapremine su: a) $V=\frac{11968\pi}{3}$; b) $V=\frac{37532\pi}{3}$.

406. Visina sloja je $H=\frac{R}{2}$, a radijusi baza su R i $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; zapremina $V=\frac{11\pi R^3}{24}.$

11. Složenija obrtna (rotaciona) tijela

407. $P=8a^2\pi\sqrt{2}$, $V=2a^3\pi\sqrt{2}$.

408. a) $P=4a\pi(a+2d)$, $V=a^2\pi(a+2d)$

b) $P=4a^2\pi\sqrt{2}$, $V=a^3\pi\sqrt{2}$.

409. $P=3a^2\pi$; $a=6$; $V=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{4}=54\pi\sqrt{3}$.

410. $P_1:P_2:P_3=b\pi(b+c):a\pi(a+c):\frac{ab\pi}{c}(a+b)=15:10:7$;

$V_1:V_2:V_3=bc:ca:ab=20:15:12$.

411. a) $P=\frac{a\pi}{4}(a+2b)$, $V=\frac{a^2\pi}{12}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$

b) $P=a\pi(a+2b)$, $V=\frac{a^2\pi}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$

c) $P=2\pi(a+b)\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$, $V=\frac{2a\pi}{3}\left(b^2-\frac{a^2}{4}\right)$.

412. $P=\frac{264\pi}{5}$, $V=\frac{192\pi}{5}$.

413. $P=b\pi(2d+h_b)+a\pi(2d+h_b)+2b\pi d=\frac{4632\pi}{13}$,

$V=\frac{b\pi h_b}{3}(3d+h_b)=\frac{7920\pi}{13}$.

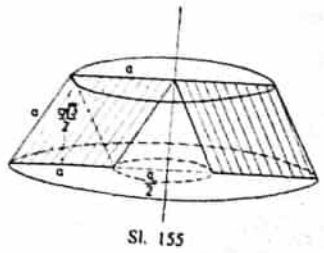
414. Površina trougla je $P=84$ pa je $h=\frac{2P}{b}=12$; $P=h\pi(a+c)=336\pi$,

$V=\frac{b\pi h^2}{3}=672\pi.$

415. $P=2\pi d_2\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$,

$V=\frac{\pi d_1 d_2^2}{2}.$

416. $P=6a^2\pi$ (sl. 155); $V=\frac{3a^3\pi\sqrt{3}}{4}$.



Sl. 155

417. a) $P=\pi(a-c)\left[a+\frac{(a-c)\sqrt{2}}{2}\right]=2\pi(5+\sqrt{2})$,

$V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2(2a+c)=\frac{13\pi}{3}$

b) $P=2\pi(3+\sqrt{2})$, $V=\frac{11\pi}{3}$.

418. a) $P=\frac{7a^2\pi}{2}$, $V=\frac{7a^3\pi\sqrt{3}}{12}$ b) $P=2a^2\pi\sqrt{3}$, $V=a^3\pi$.

419. $P=2b\pi(a+2b)$, $V=b^2\pi\left(a+\frac{4}{3}b\right)$.

420. $P=a\pi(2a+\sqrt{a^2+b^2})$, $V=\frac{a^2\pi}{3}(2a+b)$.

12. Podudarni (sukladni) i slični poliedri

421. a), b), c) i d) beskonačno mnogo e) 6 f) beskonačno mnogo g) i h) sa beskonačno mnogo; svaka ravan koja prolazi kroz osu (osovinu) cilindra ili konusa siječe ih na dvije podudarne polovine i) beskonačno mnogo; koje su to ravni?

422. $a_1=4$, $b_1=6$, $c_1=8$.

423. a) $B_1=9B$, $H_1=3H$ b) $B_1=4B$, $H_1=2H$.

424. Za homologne ivice a_1 i a_2 važi $a_1:a_2=2:3$, pa za površine imamo $P_1:P_2=4:9$, $P_2-P_1=20$; slijedi $P_1=16$, $P_2=36$.

425. $r_1=2r=6$ cm, $H_1=2H=10$ cm.

426. Koristite se teoremom: površine sličnih tijela odnose se kao kvadrati, a zapremine kao kubovi homolognih dužina. Iz relacije $V_1:V_2=7:12$ slijedi $r_1:r_2=\sqrt[3]{7}:\sqrt[3]{12}$; $M_1:M_2=r_1^2:r_2^2=\sqrt[3]{49}:\sqrt[3]{144}$.

427. $P_1=20\pi$, $P_2=180\pi$.

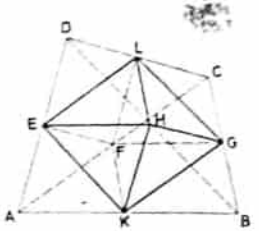
428. 30π i 270π.

429. Koeficijent sličnosti je $k=\frac{r_1}{r_2}$, pa je koeficijent sličnosti površina $P_1:P_2=k^2$ a zapremina $V_1:V_2=k^3$.

430. a) Dvije prizme su slične ako su im baze slični poligoni a homologne bočne strane slični paralelogrami. b) Dvije piramide su slične ako su im baze slični poligoni a homologne strane slični trouglovi. c) Dva cilindra su slična ako su im karakteristični presjeci slični paralelogrami. d) Dva konusa su slična ako su im karakteristični presjeci slični trouglovi. e) Svake dvije sfere su slična tijela.

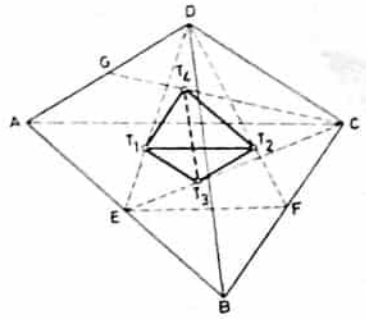
13. Pravilni poliedri

431. U pravilnom tetraedru $ABCD$ (sl. 156) spojili smo sredine ivica i dobili oktaedar $EFGHKL$. On je pravilan jer je ograničen sa osam podudarnih jednakostraničnih trouglova čije su stranice jednake polovini ivice tetraedra (zašto?).



Sl. 156

432. Težište T_1 trougla ABD (sl. 157) spojimo sa težištem T_2 trougla BCD. Kako je $\triangle DEF \sim \triangle DT_1T_2$, to je $EF : T_1T_2 = ED : T_1D$; međutim, $EF = \frac{a}{2}$, pa je $\frac{a}{2} : T_1T_2 = 3:2$; odavde slijedi $T_1T_2 = \frac{a}{3}$. Analogno se dokazuje da je $T_1T_3 = T_1T_4 = T_2T_3 = T_2T_4 = T_3T_4 = \frac{a}{3}$ itd.



Sl. 157

433. Dokažite da je $AC = BD = EF$ (sl. 158), te da su to tri duži međusobno normalne itd.

434. $\frac{a}{12}\sqrt{6}$ i $\frac{a}{4}\sqrt{6}$.

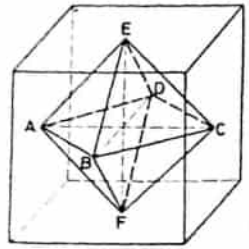
435. a) $P = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ b) $P = 2a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

436. a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

437. Ako je b ivica kocke a a oktaedra, onda je $a = b\sqrt[3]{3}$ pa je $V_1 : V_2 = \sqrt{2} : \sqrt[3]{3}$.

438. U svakom slučaju je $b = 4 \cdot 5\text{ cm} = 20\text{ cm}$.

439. $b = 3 \cdot 5\text{ cm} = 15\text{ cm}$.

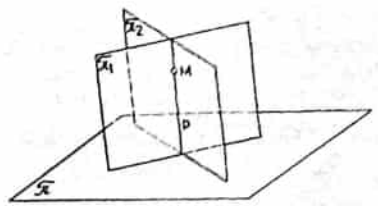


Sl. 158

14. Mješoviti i složeniji zadaci za ponavljanje stereometrije

440. Iz pretpostavke da je $\pi_1 \perp p$ i $\pi_2 \perp p$ treba dokazati da je $\pi_1 \parallel \pi_2$. Dokaz provedite sâmi prema slici iz zadatka 45.

441. Po pretpostavci je $\pi_1 \perp \pi$ i $\pi_2 \perp \pi$ (sl. 159); treba dokazati da je $p \perp \pi$. Odaberimo na pravoj p bilo koju tačku M i iz te tačke spustimo normalu na ravan π. Ta normala mora ležati u ravni π_1 kao i u ravni π_2. Ona se, prema tome, podudara sa pravom p.

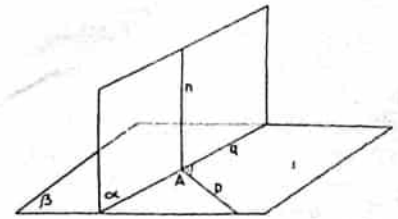


Sl. 159

442. Ako se iz jedne tačke van ravni povuku normala i kose duži do te ravni onda: a) jednake kose duži imaju jednake projekcije i b) dužoj kosoj duži pripada duža projekcija u toj ravni. — Dokažite sâmi!

443. Prava a, povučena u ravni π kroz prodor kose prave b normalno na pravu b, normalna je i na projekciju b' u ravni π kose prave b. — Dokažite sâmi ovu teoremu prema slici iz zadatka 63!

444. Ravni α i β (sl. 160) sijeku se u pravoj q te je $q \perp p$. U tački A presjeka p i q podignite normalu $n \perp \beta$. Razmotrite ugao između pravih p i n itd.

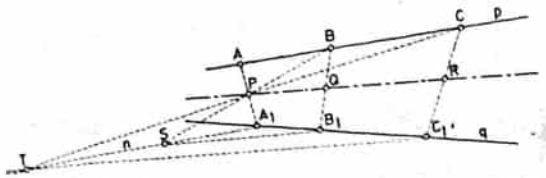


Sl. 160

445. Neka su π_1 i π_2 strane diedra a p njegova ivica. Ravan Σ koja je normalna na p, siječe ravan π_1 u pravoj p_1, a ravan π_2 u pravoj p_2. Treba dokazati da je $\Sigma \perp \pi_1$ i $\Sigma \perp \pi_2$. Lako se dokazuje da je diedar $\pi_1 p_1 \Sigma$ prav, a isto tako i $\pi_2 p_2 \Sigma$: (Provedite dokaz do kraja).

446. Zajednička tačka obiju pravih je centar simetrije. Figura ima tri ravni simetrije. To su ravni koje polove uglove koje zatvaraju zadane prave a normalne su na ravni koje obrazuju te dvije prave. Treća ravan simetrije je ravan određena samim pravama. Figura ima tri ose simetrije. To su simetrale uglova između te dvije prave. Treća osa prolazi kroz presječnu tačku zadanih pravih i na njima je normalna.

447. Neka su prave p i q mimoilazne (sl. 161). Treba dokazati da tačke P, Q i R leže na jednoj istoj pravoj. — Kroz tačku A_1 povucimo pravu $n \parallel p$. Duži AA_1, BP i CP leže u jednoj ravni (p, n) pa prave BP i CP sijeku pravu n u tačkama S i T; $A_1S = AB$ i



Sl. 161

$A_1T = AC$ pa je, prema pretpostavci, $A_1S : A_1T = A_1B_1 : A_1C_1$, a odavde $BS_1 \parallel TC_1$ (1). U trouglu BSB_1 su tačke P i Q sredine stranica pa je $SB_1 \parallel PQ$ (2). Iz trougla CTC_1 slijedi $PR \parallel TC_1$ (3). Iz relacija (1), (2) i (3) slijedi $PQ \parallel PR$ tj. PQ i PR su identične prave.

448. Ako su a i b katete trougla, a c hipotenuza, onda je $a = \sqrt{d_1^2 - n^2}$, $b = \sqrt{d_2^2 - n^2}$ i $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2n^2} = 60$.

449. Imamo sistem jednačina: $a : b : c = 3 : 4 : 5$, $(a + b + c)h = 8\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $a + b + c + h = 32$. Iz proporcije je $a = 3k$, $b = 4k$, $c = 5k$, pa je $h = 4k$. Iz treće jednačine dobijemo $k = 2$. Rezultati: $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$, $V = 192$.

450. Imamo sistem jednačina $bc + ca + ab = 47$ (1), $a + b + c = 12$ (2), $a^2 + b^2 = c^2$ (3). Iz jednačine (2) je $a + b = 12 - c$ i $(a + b)^2 = (12 - c)^2$, pa ova zajedno sa jednačinom (3) daje $ab = 72 - 12c$. Ako jednačinu (1) pišemo u obliku $c(a + b) + ab = 47$ i zamijenimo $a + b$ i ab prethodno nađenim izrazima, dobijemo $c(12 - c) + 72 - 12c = 47$, odakle je $c = 5$; iz sistema $a + b = 7$, $ab = 12$ slijedi $a_1 = 3$, $b_1 = 4$ i $a_2 = 4$, $b_2 = 3$. Radijus sfere je $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

451. Iz sistema jednačina $a + b + c = 11$, $a^2 + b^2 + c^2 = 49$, $2[(b + 2)(c + 3) + (c + 3)(a + 1) + (a + 1)(b + 2)] = 2(bc + ca + ab) + 102$ slijedi $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = 6$; $a_2 = \frac{14}{3}$, $b_2 = \frac{13}{3}$, $c_2 = \frac{16}{3}$.

452. Dobivamo sistem jednačina $bc + ca + ab = 11$ (1), $abc = 6$ (2), $a - b = 3$ (3). Jednačina (1) može da se piše u obliku $c(b + a) + ab = 11$; iz (2) je $ab = \frac{6}{c}$ pa iz (1), primjenom (2) i (3) dobijamo $3c + \frac{6}{c} = 11$. Odavde je $c = 3$. (Druga vrijednost $c = \frac{2}{3}$ ne dolazi u obzir jer ne daje realne vrijednosti za a i b). Iz sistema jednačina $a - b = 2$, $ab = 3$ slijedi $a = 1$, $b = 2$, ili obrnuto.

453. Ako je a osnovica trougla, b njegov krak, h_a i h_b pripadne visine i H visina prizme, onda je $ah_a = bh_b$, $h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; odavde nalazimo $a = 65$, $b = \frac{169}{2}$; $P = 28470$ kvadratnih jedinica, a $V = 253500$ kubnih jedinica.

454. $h = 2$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $V = 12$.

455. Ako je H visina prizme, onda je $P = H\sqrt{v^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2}$ a $V = \frac{a+c}{2}vH$. Eliminacijom veličine H iz ovih dviju jednačina slijedi $v = \frac{V(a+c)}{\sqrt{(a+c)^2P^2 - 4V^2}}$.

456. Odabranu tačku M unutar tetraedra spojte sa njegovim tjemenima (vrhovima) A, B, C i D pa uzmite u obzir da je suma zapremina piramida $MABC$, $MABD$, $MACD$ i $MBCD$ jednaka zapremini tetraedra.

457. Iz sistema $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 34$, $a^2 + 2ah = 96$ slijedi sistem $48h^2 - 12a^2 = 136 \cdot 12$, $17a^2 + 34ah = 96 \cdot 17$. Oduzimanjem jednačina slijedi $48h^2 - 34ah - 5a^2 = 0$, ili, $48\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 34\frac{h}{a} - 5 = 0$. Odavde je $\frac{h}{a} = \frac{5}{6}$; negativna vrijednost nema smisla. Iz jednačina $h = \frac{5}{6}a$, $a^2 + 2ah = 96$ slijedi $a = 6$, $h = 5$; $V = 48$.

458. Radijus kružnice opisane oko trougla čije su stranice a, b i c je $R = \frac{abc}{4P} = \frac{65}{8}$. Visina piramide $H = \sqrt{d^2 - R^2} = \frac{39}{2}$. Zapremina $V = \frac{1}{3}BH = 546$ kubnih jedinica.

459. $a = 6$, $H = \sqrt{7}$, $h = 4$; $P = 84$, $V = 12\sqrt{7}$.

460. $\sqrt{\sqrt{4H^4 + M^2} - 2H^2}$.

461. Ako je a osnovna ivica, a h visina bočne strane, onda je $a^2 : 2ah = 3 : 5$, odakle $a = 3k$, $h = \frac{5}{2}k$. Visina piramide je $H = 2k$. Radijus sfere je $r = \frac{3}{4}k$ odakle je $k = \frac{4}{3}r$; $V = \frac{a^2H}{3} = 6k^3 = \frac{128}{9}r^3$.

462. Dijagonala kvadrata je $d = 12$. Visina H_2 druge piramide je jednaka projekciji na hipotenuzu katete pravouglog trougla kome je hipotenuzina visina $\frac{d}{2} = 6$, a H_1 je projekcija druge katete na hipotenuzu: $H_2 = 4$, $V = 312$.

463. a) $P=12\pi$, $V=4\pi\sqrt{3}$ b) $P=36\pi(7-4\sqrt{3})$, $V=36\pi(26-15\sqrt{3})$.

464. Iz sistema $h=H+1$, $a=H+2$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2+H^2=h^2$ slijedi $H=4$, $a=6$, $h=5$. Radijus upisane sfere je jednak radijusu kruga upisanog u jednakokraki trougao osnovice $a=6$ i visine $H=4$ te iznosi $r=\frac{3}{2}$.

465. Visina piramide je $H=10$. Ako je x ivica kocke, onda je $a:x=H:(H-x)$ odakle $x=8$. Zapremina kocke iznosi 512 kubnih jedinica.

466. Ako je H visina piramide, a x duži dio te visine, podijeljene u zlatnom presjeku, onda je $H:x=x:(H-x)$, odakle je $x=\frac{H(\sqrt{5}-1)}{2}$. Ako se dio x računa od vrha piramide, onda je površina presjeka $\frac{3-\sqrt{5}}{2}B$, a ako se računa od baze, onda je površina presjeka $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}B$.

467. $V=\frac{H}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)$; a) Kod piramide je $B_2=0$, pa je $V=\frac{HB_1}{3}$

b) Kod prizme je $B_2=B_1$, pa je $V=\frac{H}{3}\cdot 3B_1=HB_1$.

468. Osnovne ivice zarubljene piramide su $a=50$ cm, $c=20$ cm, a visina bočne strane $h=\frac{2M}{a+c}=39$ cm. Visina $H=\sqrt{h^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}=36$ cm. Visinu x dopunske piramide nalazimo iz proporcije $50^2:20^2=(36+x)^2:x^2$ odakle je $x=24$. Tražena površina iznosi 9000 cm², a zapremina 50000 cm³.

469. $V=1072$ kubnih jedinica.

470. Visina zadane piramide $H=\frac{3V}{B}=9$. Ako je x tražena udaljenost a B_1 površina presjeka piramide, onda postoje ove dvije jednačine: $\frac{9-x}{3}(144+12\sqrt{B_1}+B_1)=416$ i $144:B_1=9^2:x^2$. Iz druge jednačine je $\sqrt{B_1}=\frac{4x}{3}$, pa prva jednačina prelazi u oblik $\frac{9-x}{3}\left(144+12\cdot\frac{4x}{3}+\frac{16x^2}{9}\right)=416$, ili $\frac{16}{27}(9-x)(81+9x+x^2)=416$. Odavde je $9^3-x^3=\frac{416\cdot 27}{16}$ pa je $x=3$.

471. Ako je H visina prizme, h visina piramide i v visina bočne strane piramide, onda imamo sistem jednačina $a^2H=\frac{a^2h}{3}$, $2a^2+4aH=a^2+2av$, $h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=v^2$; rješenje: $H=4$, $h=12$, $v=13$. Ako je c stranica kvadrata u kome presijeca piramidu gornja baza prizme, onda je $a:c=h:(h-H)$, odakle $c=\frac{20}{3}$; $V=\frac{7600}{27}$.

472. $H=\sqrt[3]{6V\sqrt{2}}$. **473.** $V=\frac{d^2}{18}\sqrt{9b^2-3d^2}$, $M=\frac{d}{2}\sqrt{12b^2-d^2}$.

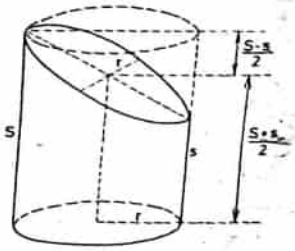
474. $V=\frac{a^3}{4\pi}$. **475.** $V_1:V_2=a:b$.

476. Sistem $2r^2\pi+2r\pi H=28\pi$, $r^2\pi H=20\pi$ prelazi u oblik $r^2+rH=14$, $r^2H=20$; odavde slijedi $r^3-14r+20=0$; jednačinu zadovoljava $r_1=2$, pa je $r^3-14r+20$ djeljivo sa $r-2$. Dijeljenjem se dobija $r^2+2r-10=0$, odakle je $r_2=\sqrt{11}-1$; $(r_3<0)$; $H_1=5$, $H_2=\frac{2(6+\sqrt{11})}{5}$.

477. $V_1:V_2=3:4$. **478.** $V_1:V_2:V_3=41:58:50$.

479. $V=798\sqrt{3}$.

480. Presjek je elipsa. Površina elipse je $ab\pi$ gdje su a i b poluose elipse. Jedna poluosa je r, a druga $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+(S-s)^2}$. Tražena površina je $P=r^2\pi+r\pi(S+s)+\frac{r\pi}{2}\sqrt{4r^2+(S-s)^2}=132\pi$; $V_1=r^2\pi\,\frac{S+s}{2}=192\pi$; $V_2=r^2\pi\cdot\frac{S-s}{2}=48\pi$ (sl. 162).



Sl. 162

481. a) $2\pi(r+x)(3r+2x)=12r^2\pi$; $x=\frac{r}{2}$

b) $2\pi(r+x)(3r+x)=30r^2\pi$, $x=2r$.

482. Iz jednačine $2\pi(r+x)(3r+x)=6nr^2\pi$ dobivamo $x^2+4rx+3r^2-3nr^2=0$, odakle $x=-2r+r\sqrt{1+3n}$. Da bi x bio racionalan, mora biti $1+3n=k^2$, odakle $n=\frac{(k-1)(k+1)}{3}$. Brojevi $k-1$, $k+1$ se razlikuju za 2. Da bi bar jedan od njih bio djeljiv sa 3, k mora biti prirodan broj koji ne sadrži mjeru (djelilac) 3; prema tome, k može biti oblika $k=3p\pm1$, $p=1, 2, 3, 4, \ldots$ tada je:

k	2	4	5	7	8	10	11	13	14 ...
k^2	44	16	25	49	64	100	121	169	196 ...
n	1	5	8	16	21	33	40	56	65 ...
x	$0r$	$2r$	$3r$	$5r$	$6r$	$8r$	$9r$	$11r$	$12r$...

483. $s=3$, $r=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$, $H=3\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, pa je $V=\frac{9\pi}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$.

484. Iz sistema $r(r+s)=90$, $r^2\sqrt{s^2-r^2}=300$ slijedi $r^4-45r^2+500=0$, čija su rješenja $r_1=5$, $r_2=2\sqrt{5}$; $s_1=13$, $s_2=7\sqrt{5}$; $H_1=12$, $H_2=15$.

485. Iz sistema $rs=60$, $s^2-r^2=64$ dobijamo jednačinu $r^4+64r^2-3600=0$, odakle je $r^2=36$; $r=6$, $s=10$, $H=8$; $P=96\pi$, $V=96\pi$.

486. Uz primjenu Heronovog obrasca, uzevši u obzir da je $2r=s+1$, $S=s+2$, nalazimo $s=13$, $2r=14$, $S=15$. Visina konusa $H=\frac{P}{r}=12$; $V=196\pi$.

487. Površina karakterističnog presjeka je 24, pa je visina konusa $H=\frac{P}{r}=12$. Radijus sfere jednak je radijusu kruga upisanog u karakteristični presjek a taj je $\frac{3}{2}$; $V_1:V_2=32:9$.

488. $V=\frac{O^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2s^2-O^2}$. **489.** 30°.

490. Visina zadanog konusa je $H=36$; radijus upisane sfere $\varrho=10$; $V=\frac{66\,500\pi}{27}$.

491. Visina cilindra je $H=4$; visina konusa $h=12$; izvodnica konusa $s=13$. Tražena zapremina $V=\frac{1900\pi}{27}$.

492. $V_1=\frac{7}{27}V$.

493. Radijus sfere je 65; tražena zapremina 10400.

494. $2\pi:9\sqrt{3}$.

495. Ako je r radijus kružnice u kojoj ravan presijeca sferu, onda je $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R-x}{3}=2r^2\cdot\frac{R+x}{3}$; odavde je $x=R\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$.

496. Radijus sfere je $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$; visina kalote $H=R-\frac{a}{2}=5$; $P=70\pi$.

497. $V_1:V_2=6:5\sqrt{5}$; $P_1:P_2=4:5$.

498. I površine i zapremine se odnose kao $4:6:9$.

499. Radijus je $\varrho=2\sqrt{3}$, pa je visina konusa $H=4\sqrt{3}$. Kako je $R+r=s$ i $R-r=\frac{s}{2}$ (zašto?) i $(R+r)^2-(R-r)^2=H^2$, to je $R=6$, $r=2$, $s=8$, pa je $P=104\pi$; $V=\frac{208\pi\sqrt{3}}{3}$.

500. Visina konusa je $H=2\varrho$, izvodnica $s=2(R-r)$ a osim toga je $R+r=s$ i $s^2-(R-r)^2=H^2$; $r=\frac{\varrho\sqrt{3}}{3}$, $R=\varrho\sqrt{3}$, $s=\frac{4\varrho\sqrt{3}}{3}$; $P=\frac{26\pi\varrho^2}{3}$, $V=\frac{26\pi\varrho^3}{9}$.

501. Ako je R radijus baze konusa, H njegova visina, s izvodnica, a r radijus upisane sfere, onda je $R:r=H:(s-R)$; odavde je $r=R\sqrt{\frac{s-R}{s+R}}$, pa je $P_1:P_2=\pi R(s+R):4R^2\pi\frac{s-R}{s+R}=(s+R)^2:4R(s-R)$; nadalje $V_1:V_2=\frac{R^2\pi\sqrt{s^2-R^2}}{3}:\frac{4\pi R^3}{3}\left(\frac{s-R}{s+R}\right)^{\frac{3}{2}}=(s+R)^2:4R(s-R)$ itd.

502. $P=168\pi$, $V=224\pi$. **503.** 100π.

504. a) $R^2\pi+r^2\pi+\pi s(R+r)=3\cdot4\varrho^2\pi$, $R^2+r^2+s(R+r)=108$. Kako je $s=R+r$ (tangentni četvorougao!), to je $R^2+Rr+r^2=54$; $V_1:V_2=\frac{4\varrho^3\pi}{3}:\frac{2\varrho\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)=1:3$. b) $1:n$.

505. Ako je x udaljenost centra lopte od baze konusa, onda je $x:R=R:(R+x)$, odakle $x=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$. Radijus baze konusa dobijamo iz relacije $r^2=R^2-x^2=\frac{R^2(\sqrt{5}-1)}{2}$. Tražena zapremina je $\frac{V=R^2\pi}{3}$.

506. Ako je a ivica piramide, onda je njezina visina $H=\frac{\sqrt{9-3a^2}}{3}$ *)

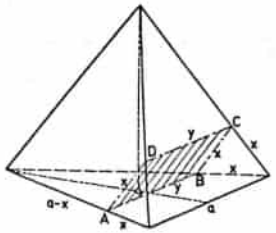
pa je $a^2\sqrt{3-a^2}=2$; odavde slijedi jednačina $a^6-3a^4+4=0$; lijeva strana se može dovesti na oblik $a^6-a^4-2a^2-2a^4+2a^2+4=a^2(a^4-a^2-2)-2(a^4-a^2-2)=(a^4-a^2-2)(a^2-2)$; iz jednačina $a^4-a^2-2=0$ i $a^2-2=0$ dobijamo rješenja $a^2=2$, $a^2=-1$ i ponovo $a^2=2$. Tada je $a=\sqrt{2}$, pa je traženi ugao 90°.

*) Upute i rezultate za ove zadatke dao je A. A. Leman.

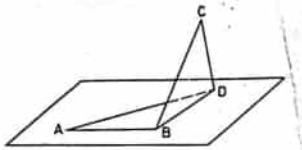
507. Obim presjeka $ABCD$ (sl. 163) je $O=2x+2y$; međutim, $y=a-x$, pa je $O=2a$.

508. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

509. Povucimo dijagonalu BD (sl. 164) prostornog četvorougla $ABCD$. Suma uglova trouglova ABD i CBD iznosi 360°. Međutim, $\sphericalangle ABC$ prostornog četvorougla je manji od sume $\sphericalangle ABD+\sphericalangle DBC$. Analogno $\sphericalangle ADC<\sphericalangle ADB+\sphericalangle BDC$ itd.

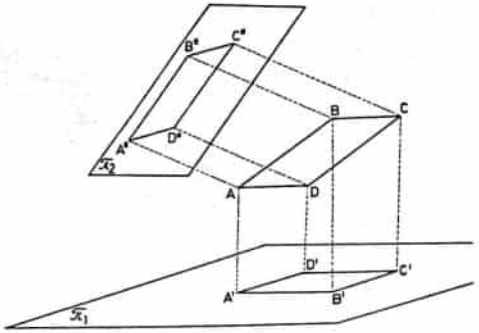


Sl. 163



Sl. 164

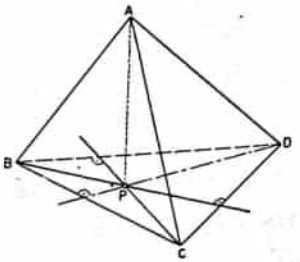
510. Sedam. Četiri ravni koje odvajaju po jednu od zadanih tačaka od preostalih triju i tri ravni koje odvajaju po dvije zadane tačke od preostalih dviju tačaka.



Sl. 165

511. Četvorougao $ABCD$ se projicira na zadanu ravan π_1 (sl. 165) u paralelogram $A'B'C'D'$, a u zadanu ravan π_2 u paralelogram $A''B''C''D''$. Treba dokazati da je $ABCD$ takođe paralelogram. — Po pretpostavci je $A'B' \parallel D'C'$, pa je ravan $AA'B'B \parallel DD'C'C$. Iz istog razloga je ravan $AA''B''B \parallel DD''C''C$. Ta dva para paralelnih ravni se sijeku u paralelama pa je $AB \parallel DC$. Iz istog razloga je $AD \parallel BC$.

512. Tačka A se projicira na ravan trougla BCD u tačku P (sl. 166). Po pretpostavci je $AB \perp CD$, pa je i projekcija duži BP na tu ravan normalna na CD tj. AB se projicira u pravu koja se poklapa sa visinom $\triangle BCD$ koja polazi iz vrha B. Iz istog razloga se i AC projicira u visinu $\triangle BCD$ koja polazi iz vrha C. Prema tome je tačka P ortocentar $\triangle BCD$, pa kroz nju prolazi i treća visina trougla BCD, tj. ona koja polazi iz vrha D. Međutim, u tu visinu se projicira duž AD, pa je $AD \perp BC$.



Sl. 166

15. Stereometrijski zadaci sa primjenom trigonometrije

513. $2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\alpha$.

514. $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}d^2\sin^2\alpha\cos\alpha$.

515. $V=\frac{2}{3}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha=\frac{b^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$.

516. $b=\sqrt[3]{\frac{3V}{\sin 2\alpha\cos\alpha}}$. **517.** $2\sin\alpha\sqrt{(ab)^3\cos\alpha}$.

518. Dijagonale baze su $\sqrt{17}$ i $\sqrt{65}$. Ako je α oštri ugao između osnovnih ivica a i b, onda je $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=17$ i $a^2+b^2+2ab\cos\alpha=65$; odavde je $a^2+b^2=41$. Uz to je $a+b=9$. Ako je a duža osnovna ivica a b kraća, onda je $a=5$ cm, $b=4$ cm, $P=104$ cm^2, $V=64$ cm^3.

519. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2H}{\sqrt{b^2-H^2}}=1$, $\alpha=45°$. **520.** $\frac{2}{3}\sqrt{P^3\operatorname{ctg}\alpha}$.

521. Ako je n broj stranica poligona, onda je $(n-2)180°=540°$, odakle je $n=5$. Površina baze je $\frac{5}{2}b^2\cos^2\alpha\sin 72°$; zapremina $V=\frac{5}{6}b^3\sin 72°\cos^2\alpha\sin\alpha$.

522. $\frac{1}{12}d^3\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

523. Visina piramide prolazi kroz centar kružnice opisane oko baze piramide. Radijus je te kružnice $R=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$; visina piramide $H=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$, površina baze $B=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$; tražena zapremina $V=\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{6}$.

524. $\frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

525. $V=\frac{a^3\operatorname{tg}\varphi}{24}$, $P=\frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi}$.

526. $a=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2P\cos\alpha}{\sqrt{3}}}$.

527. $V=\frac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha}$, $P=\frac{8r^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta}$.

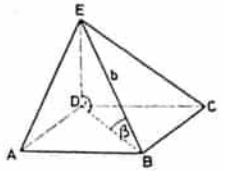
528. $M=4P\sin\beta$.

529. $P=8d^2\cos\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$*).

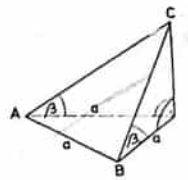
530. Visina je piramide $H=r\operatorname{tg}\varphi$. Ako su $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ stranice poligona, onda je površina baze $B=\frac{1}{2}a_1r+\frac{1}{2}a_2r+\cdots+\frac{1}{2}a_nr=\frac{1}{2}r(a_1+a_2+\cdots+a_n)=rs$. Tražena zapremina je $V=\frac{r^2s\operatorname{tg}\varphi}{3}$.

531. $V=\frac{1}{3}(2P)^{\frac{3}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}2\alpha$. **532.** $V=\frac{1}{3}H^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

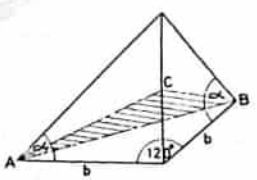
533. $DE=b\sin\beta$ (sl. 167); $AE=CE=b\sqrt{\frac{1+\sin^2\beta}{2}}$.



Sl. 167



Sl. 168



Sl. 169

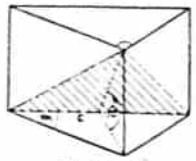
534. Površina najveće bočne strane ABC (sl. 168) iznosi $\frac{a^2}{4\cos\beta}\sqrt{4-\cos^2\beta}$.

535. Površina presjeka ABC (sl. 169) iznosi $\frac{b^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

*) Uzmite u obzir da se površina piramide, čije su sve bočne strane (pobočke) nagnute prema bazi (B) pod istim uglom (kutom) φ, može pisati u obliku $P=B+M=B+\frac{B}{\cos\varphi}=B\left(1+\frac{B}{\cos\varphi}\right)=\frac{2B\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$.

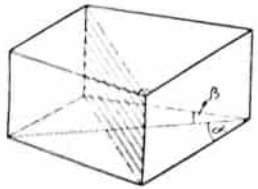
536. $V = a^3 \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha} = a^3\sqrt{2}$.

537. $V = \frac{1}{24} c^3 \sin^2 2\alpha \operatorname{tg}\beta$ (sl. 170).

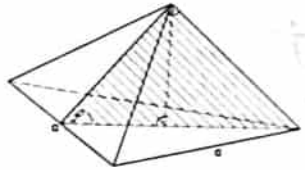


Sl. 170

538. Površina baze (sl. 171) $B = \frac{d^2}{4}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \frac{d^2}{2}\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; visina $H = \frac{d}{d\sin(\alpha+\beta)}$; $V = \frac{Pd}{2}\cos(\alpha-\beta)$.



Sl. 171



Sl. 172

539. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$ (sl. 172); $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

540. $V = \frac{1}{12}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha$.

541. $V = \frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha}{3\sqrt{2}}$.

542. $P = \frac{3s^2\pi}{4}$, $V = \frac{s^3\pi\sqrt{3}}{24}$.

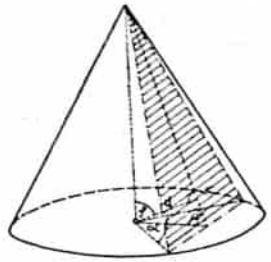
543. $V = \frac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.

544. $P = \frac{\pi m^2 \sin\alpha\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4\frac{\alpha}{2}}$, $V = \frac{\pi m^3 \sin^2\alpha\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

545. $V = \frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

546. $V = \frac{\pi h^3 \sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha-\beta)}$.

547. $V = \frac{a^3\pi}{3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ (sl. 173).

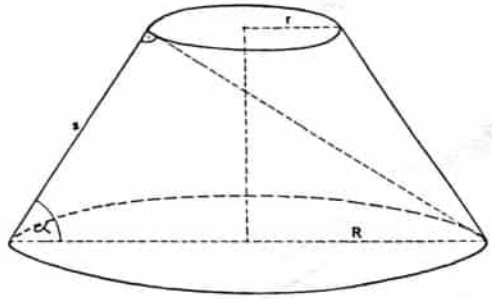


Sl. 173

548. $V = \frac{a^3\pi\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$;

$P = \frac{a^2\pi\left(1+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2\pi\sin\frac{90^\circ+\alpha}{4}\cos\frac{90^\circ-\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

549. $M = \pi s(R+r) = \pi s^2\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \pi s^2 \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$ (sl. 174).



Sl. 174

550. Visina konusa je $H = \sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$ a radijus baze $R = \sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{ctg}\alpha}{\pi}}$. Ako je M omotač zadanog konusa, M_1 omotač svakog od odsječenih dijelova, a H_1 tražena udaljenost, onda je, zbog sličnosti konusa, $H_1 : H = \sqrt{M_1 : M} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, pa je $H_1 = \frac{H}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$.

551. $V = \frac{4\pi}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}$, $P = \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+1\right)$.

552. $V = \frac{2\pi Pb\sin\alpha}{3}$.

553. $V = \frac{a^3\pi\sin^2\beta\sin^2\gamma}{3\sin^2(\beta+\gamma)}$.

554. $V = \dfrac{d^3\pi \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}{2}$.

555. $V = \dfrac{bc\pi(b+c)\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}{3}$.

556. $P = 2b^2\pi \operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha) = 4b^2\pi \operatorname{tg}\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}$.

557. $V = \dfrac{4\pi s^3\cos^3\alpha \operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}}{3}$.

558. $P = \dfrac{h^2\pi\sin(\alpha+\beta)[\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha]}{\sin^2\beta\sin\alpha} =$

$= \dfrac{2h^2\pi\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha\sin^2\beta}$.

559. $V = \sqrt{3}R^3 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

560. $M = \dfrac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$.

561. $P = 2\pi r^2\left(\dfrac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right)$.

562. $M = 2\pi R^2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2}\right) = 2\pi R^2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{4}$.

LITERATURA

Антонов, Выгодский; *Сборник задач по элементарной математике*, Москва 1962.

Леман; *Сборник задач московских математических олимпиад*, Москва 1965.

Gajdeczka - Kaller: *Übungsbuch zur Geometrie*, Wien, 1932.

Wallentin; *Maturitätsfragen aus der Mathematik*, Wien, 1901.

Mandl; *Übungsaufgaben zum Lehrbuch der Geometrie*, Wien, 1912.

44 11 366
-80
-80

SADRŽAJ

Strana

Predgovor 5

ZADACI

1. Tačka, prava i ravan (pravac i ravnina) 7
2. Translacija, rotacija i simetrija u prostoru 14
3. Rogalj, triedar 16
4. Prizma 17
5. Piramida 22
6. Zarubljena (krnja) piramida 27
7. Valjak (cilindar) 32
8. Konus (kupa, stožac) 36
9. Zarubljeni konus (zarubljena kupa, krnji stožac) 40
10. Sfera, lopta (kugla) 44
11. Složenija obrtna (rotaciona) tijela 52
12. Podudarni (sukladni) i slični poliedri 54
13. Pravilni poliedri 56
14. Mješoviti i složeniji zadaci za ponavljanje stereometrije 58
15. Stereometrijski zadaci sa primjenom trigonometrije 64

UPUTE I REZULTATI

1. Tačka, prava i ravan (pravac i ravnina) .....
2. Translacija, rotacija i simetrija u prostoru .....
3. Rogalj, triedar .....
4. Prizma 92
5. Piramida 100
6. Zarubljena (krnja) piramida 109
7. Cilindar (valjak) 115
8. Konus (kupa, stožac) 119
9. Zarubljeni konus (zarubljena kupa, krnji stožac) 124
10. Sfera, lopta (kugla) 128
11. Složenija obrtna (rotaciona) tijela 137
12. Podudarni (sukladni) i slični poliedri 139
13. Pravilni poliedri 140
14. Mješoviti i složeniji zadaci za ponavljanje stereometrije 141
15. Stereometrijski zadaci sa primjenom trigonometrije 150

Literatura 155

Stjepan Mintaković: *Zbirka zadataka iz stereometrije* / Naslovna strana: Hamid Lukovac / Tehnički urednik: Divna Lubura / Korektor: Milica Borić / Izdaje: Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo / Za izdavača: Slobodan Stojnić / Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Vojvode Mišića 17

6. Zarubljena (krnja) piramida 115
7. Cilindar (valjak) 119
8. Konus (kupa, stožac) 124
9. Zarubljeni konus (zarubljena kupa, krnji stožac) 128
10. Sfera, lopta (kugla) 137
11. Složenija obrtna (rotaciona) tijela 139
12. Podudarni (sukladni) i slični poliedri 140
13. Pravilni poliedri 141
14. Mješoviti i složeniji zadaci za ponavljanje stereometrije 150
15. Stereometrijski zadaci sa primjenom trigonometrije 155

Literatura .....

Stjepan Mintaković: *Zbirka zadataka iz stereometrije* / Naslovna strana: Hamid Lukovac / Tehnički urednik: Divna Lubura / Korektor: Milica Borić / Izdaje: Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo / Za izdavača: Slobodan Stojnić / Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Vojvode Mišića 17